

М а т е м а т и к а . П р и к л а д н а я м а т е м а т и к а

УДК 51-73

Барабаш Татьяна Константиновна
Амурский государственный университет
г. Благовещенск, Россия

E-mail: barabash-tatyana@mail.ru

Масловская Анна Геннадьевна
Амурский государственный университет
г. Благовещенск, Россия

E-mail: maslovskayaag@mail.ru

Barabash Tatyana Konstantinovna
Amur State University
Blagoveshchensk, Russia

E-mail: barabash-tatyana@mail.ru

Maslovskaya Anna Gennadievna
Amur State University
Blagoveshchensk, Russia

E-mail: maslovskayaag@mail.ru

**МОДЕЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ТЕМПЕРАТУРНО-ИНДУЦИРОВАННОЙ
КИНЕТИКИ ДОМЕННОЙ ГРАНИЦЫ
В КОНЦЕПЦИИ МЕТОДА ЛОКАЛЬНЫХ ВАРИАЦИЙ**

**MODEL OF TEMPERATURE-INDUCED DOMAIN BOUNDARY KINETICS
IN THE CONCEPT OF THE LOCAL VARIATION METHOD**

Аннотация. В работе представлена методика построения и реализации модели равновесной конфигурации и динамики доменной границы сегнетоэлектрика в поле градиента температуры. Математическая постановка задачи сформулирована с использованием вариационного подхода в рамках термодинамической теории Ландау-Гинзбурга-Девоншира. Показана возможность применения метода локальных вариаций для построения алгоритма численного решения прикладной задачи. Установлены связи между параметрами, характеризующими состояние системы.

Abstract. The paper presents a technique for constructing and implementing a model of the equilibrium configuration and dynamics of a ferroelectric domain wall in a temperature field. The mathematical problem statement is formulated using a variation approach within the framework of the Landau-Ginzburg-Devonshire thermodynamic theory. The using the method of local variations for the algorithm design for numerical solution of the applied problem is demonstrated. The dependencies of parameters characterizing the state of the system were established.

Ключевые слова: модель доменной границы, сегнетоэлектрик, вариационная задача, метод локальных вариаций, численный алгоритм.

Key words: domain wall model, ferroelectric, variation problem, local variation method, numerical algorithm.

Введение

На современном этапе математическое моделирование и компьютерный эксперимент являются потенциально значимыми составляющими при решении многих классов задач в области исследования неравновесных физических систем. Сегнетоэлектрические материалы представляют собой перспективные функциональные диэлектрики, которые нашли широкое применение в микроэлектронике, оптике, пиротехнике и акустике [1-2]. Динамика доменных и межфазных границ в сегнетоэлектрических системах представляет объект междисциплинарных исследований, что во многом обусловлено задействованием этих процессов в механизмах переключения поляризации. Как известно, инвертация доменной структуры в сегнетоэлектриках может быть индуцирована различными полевыми воздействиями, – например, прямым приложением электрического поля или воздействием тепловых полей. В отношении доменных границ следует отметить, что при отклонении температуры двухфазной системы от значений, соответствующих равновесному состоянию, возникает термодинамическая сила как следствие различия термодинамических потенциалов фаз. Результатом таких процессов является микросмещение границ доменов. Такая же ситуация имеет место в полидоменном кристалле в электрическом поле [3].

При отсутствии полевого воздействия энергетическое состояние различных доменов оказывается эквивалентным. Однако энергией также обладает граница раздела фаз и поверхностные силы, что, в свою очередь, может приводить к смещению доменных границ. В исследовании [4] представлены формализованные описания спонтанного перемещения границ доменов под действием лапласовских сил. Эффекты возникновения термодинамических сил, инициирующих движение границ, наблюдаются и при температурном воздействии на сегнетоэлектрики. Известные работы, выполненные в данном направлении, основаны на макроскопическом приближении в моделях кинетики доменных и межфазных границ. В макроскопических моделях дополнительно вводят в рассмотрение феноменологические силы сухого и вязкого трения или инерции [5]. Целая серия предшествующих исследований [6-9] посвящена разработке и реализации феноменологических моделей движения доменных границ под действием термодинамических сил. В работе [6] автор построил и исследовал компьютерную модель поведения доменной стенки вблизи фазового перехода, в основе которой – модель одной ячейки, обладающей потенциальной энергией. В [7] представлен расчет смещения стенок с помощью компьютерного моделирования для модельного полидоменного кристалла, обладающего слоистой структурой типа «паркет». Работы [8-9] посвящены детальному исследованию механизмов движения доменных и межфазных границ в твердых растворах.

В настоящей работе мы продолжаем развитие авторского подхода, предложенного для моделирования конфигурации доменной границы в неравновесных условиях изменения температуры [10-11]. Цель исследования – алгоритмизация вариационной термодинамической модели равновесной конфигурации и динамики доменной границы сегнетоэлектрика в поле градиента температуры с использованием метода локальных вариаций.

1. Физико-математическая постановка задачи моделирования

Следуя термодинамической теории сегнетоэлектриков Ландау – Гинзбурга – Девошира, допустим, что тепловое, упругое и диэлектрическое поведение однородного диэлектрика полностью описывается шестью величинами: полями температуры T , энтропии S , напряжения \mathbf{X} , деформации \mathbf{x} , электрического поля \mathbf{E} и электрической индукции \mathbf{D} . Термодинамической функцией, достаточно полно описывающей свойства сегнетоэлектриков, может служить свободная энергия – упругая энергия Гиббса $G_1(T, X_i, D_i)$ [2]. В частном случае, когда приложенные механические напряжения отсутствуют, т.е. $X=0$, неполярная фаза центросимметрична и $D_i=D$ -индукция направлена вдоль одной из кристаллографических осей, функция G_1 имеет вид простого полинома [2]:

$$G_1 = \frac{\tilde{\gamma}}{2} \tilde{\tau}^2 + \frac{\tilde{\gamma}}{4} \tilde{\tau}^4 + \frac{\tilde{\gamma}}{6} \tilde{\tau}^6 + \dots \quad (1)$$

Коэффициенты $\tilde{\gamma}$, $\tilde{\gamma}$ и $\tilde{\gamma}$ в общем случае зависят от температуры, но простые примеры переходов первого и второго рода можно описать, считая, что $\tilde{\gamma}$ и $\tilde{\gamma}$ от нее не зависят (при таком предположении порядок перехода зависит от знака $\tilde{\gamma}$). В феноменологической теории принято считать, что вблизи температуры Кюри T_C параметр $\tilde{\gamma}$ линейно зависит от температуры (выполняется закон Кюри – Вейсса) [1]:

$$\tilde{\gamma} = \beta (T - T_C), \text{ Н}\cdot\text{м}^2/\text{Кл}^2, \quad (2)$$

где β – положительная константа, связанная с константой Кюри – Вейсса C^P соотношением $C^P = \frac{1}{\epsilon_0 \cdot \beta}$, К (ϵ_0 – электрическая постоянная, Кл²/(Н·м²)).

В силу того, что $D \sim P$ при $E=0$, из условия $\frac{\partial G_1}{\partial D} = 0$, нетрудно вычислить спонтанную поляризацию P_S ниже температуры Кюри для сегнетоэлектрических кристаллов с фазовыми переходами II рода [2]:

$$P_S^2 = \frac{\beta}{\tilde{\gamma}} (T - T_C), \text{ Кл}/\text{м}^2. \quad (3)$$

Зависимость поверхностной энергии доменной стенки от температуры в неоднородном тепловом поле будет приводить к возникновению термодинамических сил, что, в свою очередь, вызовет ее смещение. Выражение для поверхностной энергии доменной границы впервые было предложено Жирновым [12]:

$$\sigma = \left(-\frac{4\sqrt{2}}{3} \right) \cdot \tilde{\gamma} \cdot \tilde{\tau}, \text{ Дж}/\text{м}^2, \quad (4)$$

где $\tilde{\tau} = \sqrt{\tilde{\gamma}}$ – толщина доменной стенки, м; $f \sim d^2$ – коэффициент в выражении вклада корреляционной энергии в свободную энергию кристалла, м²; d – постоянная решетки, м.

Таким образом, для кристаллов с фазовыми переходами второго рода зависимость удель-

ной поверхностной энергии σ от температуры T , с учетом (2) – (4), можно записать в виде:

$$\sigma = \frac{4\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{d}{\sqrt{\varepsilon_0}} \cdot \frac{\beta^{3/2}}{r} \cdot (T - T_c)^{3/2}. \quad (5)$$

В области с более высокой температурой поверхностная энергия стенки уменьшается, что приводит к появлению термодинамической силы, действующей на стенку и направленной вдоль градиента температуры. При температуре, равной температуре фазового перехода, различие между доменными областями плавно исчезает, и поверхностная энергия доменной стенки обращается в нуль.

Рассмотрим тепловое поле с линейным распределением температуры:

$$T(z) = T_0 + \alpha \cdot z, \quad (6)$$

где T_0 – начальная температура для исходного положения границы, К; $\alpha = \frac{dT}{dz}$ – градиент температуры, К/м.

Для нормировки параметров можно задать некоторый уровень отклонения границы от равновесного положения z_c , соответствующий температуре Кюри T_c . Тогда

$$T(z) = \alpha(z - z_c) + T_c. \quad (7)$$

Подстановка последнего в (5) дает

$$\sigma(z) = \sigma_0 \cdot (\alpha \cdot (z_c - z))^{3/2}, \quad (8)$$

где $\sigma_0 = \frac{4\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{d}{\sqrt{\varepsilon_0}} \cdot \frac{\beta^{3/2}}{r}$.

Один из известных подходов к построению физико-математических моделей, сопоставимых с возможностями, предоставляемыми универсальными фундаментальными законами природы, заключается в использовании вариационных принципов. Это, как правило, предполагает выбор одного из возможных вариантов состояния системы, удовлетворяющего определенному критерию оптимальности [13].

Задачу о моделировании равновесной конфигурации в поле линейного градиента температуры сформулируем как вариационную задачу о минимизации функционала:

$$\Phi(z(x, y)) = \iint_S \sigma(z(x, y)) dS = \iint_D \sigma(x, y, z) \cdot \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2} dx dy \rightarrow \min \quad (9)$$

или в двухмерном случае, с учетом (8):

$$\Phi(z(x)) = \int_{x_0}^X \alpha^{3/2} \sigma_0 \cdot (z_c - z)^{3/2} \sqrt{1 + z_x'^2} dx \rightarrow \min, \quad (10)$$

с граничными условиями, соответствующими случаю закрепления доменной стенки:

$$z(x_0) = z(X) = 0. \quad (11)$$

На рис. 1 представлена схема изменения конфигурации доменной границы в тепловом поле для сегнетоэлектрических кристаллов с 180° доменными стенками.

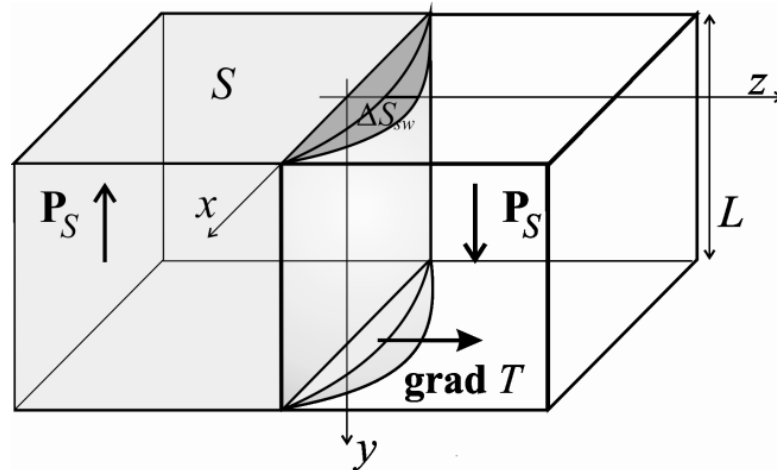


Рис. 1. Модельное представление конфигурации доменной границы.

Для общей постановки прикладной задачи (10) – (11) можно ввести обозначения независимых параметров в нормированных единицах: $\sigma_0 = 1$; $T_0 = -1$; $T_C = 0$; $z_c = 50$. В этом случае градиент температуры примет значение $\alpha = 0.02$.

Чтобы убедиться, что экстремаль $z^*(x)$ доставляет минимум функционалу

$\Phi(z(x)) = \int_{x_0}^x \alpha^{3/2} \sigma_0 \cdot (z_c - z)^{3/2} \sqrt{1 + z_x'^2} dx$, рассмотрим вторую производную подынтегральной функции $F(x, z, z')$ по z' :

$$F_{z'z'} = \sigma_0 \cdot \alpha^{3/2} \cdot \frac{(z_c - z)^{3/2}}{(1 + (z_x')^2)^{3/2}}. \quad (12)$$

Знаменатель выражения (12) положителен при любых значениях z' , числитель также положителен при любых значениях z , поскольку формализация математической модели предполагает выполнение условия $z < z_c$. Из этого следует, что выполняется усиленное условие Лежандра $F_{z'z'} > 0$ и функционал (10), согласно теореме о достаточном условии слабого минимума (максимума), на некоторой экстремали $z^*(x)$ достигает своего минимума.

В общем случае вариационная задача в постановке (10) – (11) не разрешается известными аналитическими методами. Точное решение ее можно построить лишь в случае линейного приближения зависимости $\sigma(z) = \alpha \sigma_0 (z_c - z)$. Результаты решения вариационной задачи в линейном для $\sigma(z)$ приближении выражаются следующим соотношением:

$$z = z_0 - \frac{C_1}{\alpha \sigma_0} ch \frac{\alpha \sigma_0}{C_1} (C_2 - x),$$

где C_1, C_2 – константы, определяемые из граничных условий. График этой функции представляет собой хорошо известную в вариационном исчислении цепную линию.

Поскольку аналитические решения строятся для достаточно узкого класса вариационных задач, то для реализации математической модели и решения сформулированной вариационной задачи в общей постановке обратимся к использованию численных процедур.

2. Методика численного решения вариационной задачи о форме фазовой границы

Построим схему численного решения вариационной задачи (10) с граничными условиями (11), используя идею метода локальных вариаций [14]. Разобьем отрезок $[x_0, X]$ на N равных частей с шагом $\Delta x = \frac{X - x_0}{N}$: $x_i = x_0 + i\Delta x$, $i = \overline{0, N}$. Согласно данному численному алгоритму, введем обозначение для подынтегральной функции $F(x, z, z')$:

$$I_i[z_i, z_{i+1}] = F(x_i + \Delta x / 2, (z_i + z_{i+1}) / 2, (z_{i+1} - z_i) / \Delta x) \cdot \Delta x. \quad (13)$$

Функции $z(x)$ будем аппроксимировать ломаными, соединяющими точки (x_i, z_i) в плоскости Oxz , а функционал (10), с учетом (13), приближенно заменим суммой

$$J \approx I = \sum_{i=0}^{N-1} I_i[z_i, z_{i+1}].$$

Решение задачи (10) – (11) будем строить последовательными приближениями $z_i^{(n)}$, $n = 0, 1, 2, \dots$, выбирая в качестве начального приближения значения z_i^0 , удовлетворяющие ограничениям (11). В качестве возможных значений для z_i^{k+1} рассматриваем три величины: z_i^k , $z_i^k + h$, $z_i^k - h$ при априорно заданном шаге варьирования h . Далее проводим подсчет сумм:

$$\begin{aligned} \Phi_i &= I_{i-1}[z_{i-1}^{k+1}, z_i^k] + I_i[z_i^k, z_{i+1}^k], \\ \Phi_i^+ &= I_{i-1}[z_{i-1}^{k+1}, z_i^k + h] + I_i[z_i^k + h, z_{i+1}^k], \\ \Phi_i^- &= I_{i-1}[z_{i-1}^{k+1}, z_i^k - h] + I_i[z_i^k - h, z_{i+1}^k]. \end{aligned} \quad (14)$$

Искомую величину z_i^{k+1} полагаем равной тому из трех чисел z_i^k , или $z_i^k + h$, или $z_i^k - h$, которое удовлетворяет ограничениям (11) и которому отвечает наименьшая из сумм (14):

$$z_i^{k+1} = \begin{cases} z_i^k & \text{при } \Phi_i \leq \Phi_i^+, \Phi_i \leq \Phi_i^-, \\ z_i^k + h & \text{при } \Phi_i^+ < \Phi_i, \Phi_i^+ \leq \Phi_i^-, \\ z_i^k - h & \text{при } \Phi_i^- < \Phi_i, \Phi_i^- < \Phi_i^+. \end{cases} \quad (15)$$

Геометрическая схема метода локальных вариаций представлена на рис. 2.

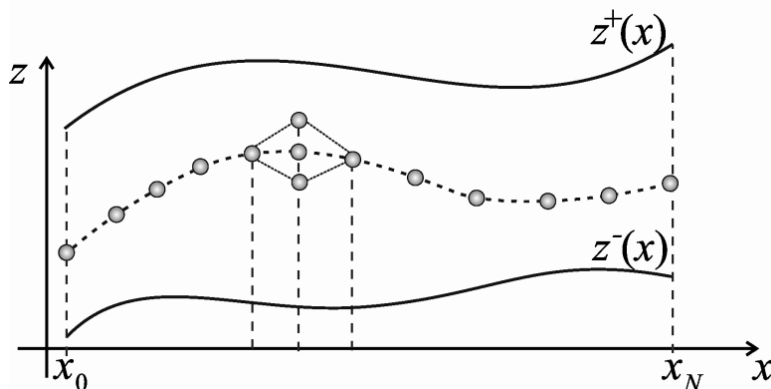


Рис. 2. Схема метода локальных вариаций.

Для оптимизации вычислений выбор шага дискретизации Δx и шага варьирования h проводился в соответствии со схемой двойного пересчета (т.е. для каждой итерации осуществлялась итерационная обработка с подбором оптимальных значений Δx и h). Данный метод позволяет находить локальный минимум функционала при выполнении условий: $\Delta x \rightarrow 0$, $h/(\Delta x)^p$ при $p \geq 2$.

Следует отметить, что численное решение задачи (10) – (11) может быть найдено и с использованием других известных методов решения задач в вариационной постановке, – например, методом конечных разностей, в отдельных случаях методом Рунге или методом конечных элементов. Кроме того, результат в виде функциональной зависимости $z(x)$ может быть получен с помощью прямого численного решения краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения, найденного с помощью уравнения Эйлера:

$$z'' = -\frac{3(1 + z_x'^2)}{2(z_c - z)}.$$

Однако использование метода локальных вариаций оправдано, поскольку его алгоритм позволяет описать не только статическое, предельное положение доменной границы, но и динамику достижения этого положения. Процедура построения решения на основе метода локальных вариаций отвечает физическим законам поведения моделируемой системы.

Следует отметить также, что используемый подход в случае решения данной физической задачи находит идейное согласование с методом статистических испытаний, формализация алгоритмической процедуры которого сводится к выбору одного из вероятных состояний физической системы, обусловленных случайными флуктуациями.

3. Формализация алгоритма решения прикладной задачи и вычислительный эксперимент

Для решения задачи моделирования формы и динамики доменной границы сегнетоэлектрического кристалла в поле градиента температуры разработана прикладная программа, предназначенная для решения задачи в нормированных величинах.

Входные данные программы: градиент температуры α , отн.ед.; параметр z_c , отн.ед.; комплекс констант σ_0 , отн. ед.; границы расчетной области x_0, X , отн. ед.; P_S^0 – значение спонтанной поляризации сегнетоэлектрика при температуре, равной значению T_0 , отн. ед.; температура Кюри T_C , отн. ед.

Выходные данные программы: массив значений $z(x)$, определяющий профиль доменной стенки; массив значений $I(t)$, определяющий поляризационный ток; графические визуализации массивов.

Верификация результатов моделирования: сравнение результатов, полученных численными методами, с данными аналитических решений для тест-задач.

Алгоритм программной реализации прикладной задачи о конфигурации и динамике доменной границы сегнетоэлектрика в неоднородном тепловом поле методом локальных вариаций.

Шаг 1. Инициализация параметров моделирования, определение параметров вычисли-

тельного процесса:

1) определение количества отрезков, на которые разбивается интервал решения задачи – N ;
 2) задание левой и правой границ интервала решения задачи a, b (отн. ед.), определенные значения функции на левой и правой границах интервала $A=0, B=0$ (отн. ед.) (граничные условия (11));

3) расчет длины отрезка разбиения $dx = \frac{b-a}{N}$ и инициализация расчетной сетки x_i ;

4) инициализация параметров модели: α , отн. ед.; z_c , отн. ед.; σ_0 , отн. ед.; P_S^0 , отн. ед.; T_C , отн. ед.;

5) инициализация значений матриц сумм $\Phi_i, \Phi_i^+, \Phi_i^-$ (14) (нулевые значения);

6) инициализация начального приближения для старта программы;

7) инициализация шага варьирования h счетчиков итераций; абсолютной погрешности найденного решения.

Шаг 2. Инициализация подынтегральной функции (13) с учетом численной аппроксимации производной.

Шаг 3. Организация внешнего цикла по k с предусловием для расчета последовательных приближений к решению.

Шаг 4. Расчет нового приближения для каждого узла z_i^{k+1} по соотношению (3.15) с учетом условий (3.14) (с организацией отдельных процедур для крайних правой и левой точек интервала и цикла по i – для внутренних точек области расчета).

Шаг 5. Расчет поляризационного тока по соотношению (3.19) на основе двух последовательных приближений соседних временных слоев.

Шаг 6. Выполнение условия сходимости (да – выход из программы, вывод результатов).

Шаг 7. Обновление массива решений.

На рис. 3 представлен результат численного моделирования динамики доменной границы при достижении равновесного положения с использованием программы моделирования, алгоритм которой описан выше.

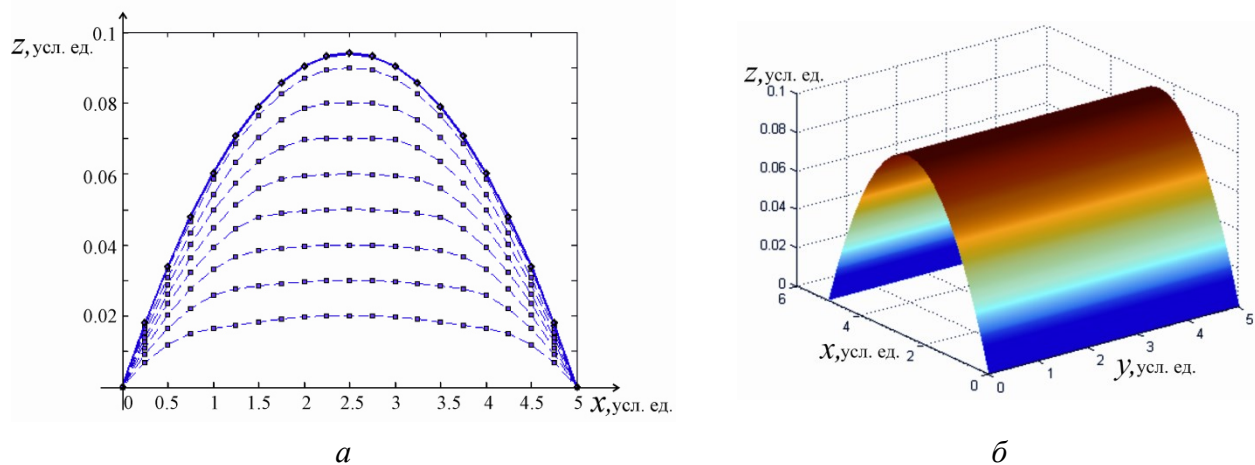


Рис. 3. Профиль доменной границы: *a* – трехмерная визуализация двумерной модели, *б* – результат моделирования при нормированных значениях параметров.

Оценивая результат в нормированных величинах, можно заключить, что в поле постоянного градиента температуры максимальная величина отклонения доменной стенки от начального положения, соответствующего некоторому значению температуры T_0 , составляет $\Delta z = 0.1$ усл. ед. при $\alpha = 0.02$ усл. ед. и при линейном размере домена $\Delta X = 5$ усл. ед. ($\Delta z \sim 2\%$). С увеличением значения градиента будет возрастать и максимальное отклонение от равновесного положения. Численное значение величины Δz будет определено параметрами моделирования T_0 , T_C , z_c , α , X и в итоге не будет зависеть от величин, образующих комплекс σ_0 .

Анализируя зависимость переходного поляризационного тока, можно заключить, что переходный сигнал имеет резкий начальный выброс, обусловленный, по-видимому, более быстрым ростом скорости движения границы в начальные моменты времени. Дальнейшее поведение характеризуется спаданием, что, вероятно, соответствует замедлению движения границы.

Таким образом, использование основных положений физики макроскопических систем и вариационного принципа моделирования позволило сформулировать математическую двумерную модель динамики доменной границы сегнетоэлектрического кристалла в неоднородном тепловом поле. Реализация такой модели может быть эффективна с использованием численного метода локальных вариаций или на основе использования метода случайных блужданий. Данные методы в теории и практике математического моделирования традиционно представляют различные классификационные категории, однако при решении поставленной прикладной задачи они отражают единый концептуальный подход – выбор оптимальной конфигурации доменной стенки на каждом временном шаге.

Применение указанных алгоритмов, дающих пошаговое приближение к экстремали функционала, достаточно эффективно и предоставляет возможность компьютерной имитации движения доменной границы. Такой подход позволяет получить не только равновесную форму доменной границы в тепловом поле, но и исследовать ее динамику в тепловых полях произвольной конфигурации. Эволюционная реализация модели предусматривает возможность оценки дополнительной компоненты пирозлектрического отклика, обусловленного движением доменной границы сегнетоэлектрического кристалла в неоднородном тепловом поле. Кроме того, с учетом применимости методов в многомерном случае предложенная модель может быть модифицирована к случаю трех пространственных переменных с соответствующим заданием теплового распределения в модельном образце.

Заключение

Таким образом, в статье изложена концепция построения и методики реализации модели равновесной конфигурации и динамики доменной границы сегнетоэлектрика в поле градиента температуры.

Предложена математическая модель конфигурации 180° доменной границы сегнетоэлектрика с фазовым переходом II рода, основанная на термодинамической теории Гинзбурга – Девоншира. Математическая постановка задачи моделирования конфигурации доменной границы в тепловом поле сформулирована с использованием вариационного подхода.

Показана возможность применения метода локальных вариаций для численного решения прикладной задачи, допускающей вариационную постановку. Разработан алгоритм решения прикладной задачи; установлены связи между параметрами, характеризующими состояние системы.

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, проект № 122082400001-8.

1. Лайнс, М., Гласс, А. Сегнетоэлектрики и родственные им материалы. – М.: Мир, 1981. – 725 с.
2. Рабе, К.М., Анна, Ч.Г., Трискона, Ж.-М. Физика сегнетоэлектриков: современный взгляд. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2011. – 440 с.
3. Смоленский, Г.А., Боков, В.А., Исупов, В.А., Крайник, Н.Н., Пасынков, Р.Е., Шур, М.С. Сегнетоэлектрики и антисегнетоэлектрики. – М.: Наука, 1971. – 465 с.
4. Донцова, Л.И. Доменная структура и процессы 180° переполяризации модельных сегнетоэлектриков. – Автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук. – Воронеж, 1991. – 20 с.
5. Ломаев, Г.В., Ходырев, А.В. Моделирование движения доменной границы в конденсированных средах // Процессы переключения в сегнетоэлектриках и сегнетоэластиках. Тез. докл. семинара, посвященного памяти В.М. Рудяка. – Тверь, 2002. – С. 15.
6. Parlunski, K. Domain pattern formation near phase transition – challenge for computer simulations // *Ferroelectrics*. – 1997. – V. 191. – P. 245-253.
7. Алешин, В.И., Лучанинов, А.Г. Моделирование переполяризации кристалла и керамики типа BaTiO_3 // Известия АН, сер. «Физика». – 2001. – Т. 65, №8. – С. 1114-1118.
8. Нестеров, В.Н., Шильников, А.В. Моделирование на ЭВМ лапласового давления и его роль в некоторых процессах перестройки доменной структуры сегнетоэлектриков // XIV Всероссийская конференция по физике сегнетоэлектриков. Тез. докл. – Иваново, 1995. – С. 340.
9. Нестеров, В.Н., Шильников, А.В., Бурханов, А.И. Процессы переключения в сегнетоэлектриках и их моделирование // Сб. трудов Международной научно-практ. конф. «Пьезотехника-95». – Ростов, 1995. – Т. 1. – С. 126-137.
10. Масловская, А.Г., Ванина, Е.А. Упорядоченное движение доменных границ сегнетоэлектрических кристаллов в неоднородном тепловом поле // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Серия «Физико-математические науки». – 2010. – №2 (98). – С. 7–11.
11. Масловская, А.Г. Применение вариационных принципов для компьютерного моделирования динамики доменной границы сегнетоэлектрика в поле градиента температуры // Научно-технические ведомости Санкт-Петербургского государственного политехнического университета. «Информатика. Телекоммуникации. Управление». – 2013. – №1(164). – С. 68-75.
12. Жирнов, В.А. К теории доменных стенок в сегнетоэлектриках // Журнал экспериментальной и теоретической физики. – 1958. – Т. 35. – Вып 5(1). – С. 1175-1180.
13. Самарский, А.А., Михайлов, А.П. Математическое моделирование. Идеи, методы, проблемы. Монография. – М.: Физматлит, 2005. – 320 с.
14. Черноусько, Ф.Л., Баничук, Н.В. Вариационные задачи механики и управления. – М.: Наука, 1973. – 240 с.