

УДК 519.872.6

Максимова Надежда Николаевна

Амурский государственный университет

г. Благовещенск, Россия

E-mail: knnamursu@mail.ru

Гринь Виктория Константиновна

Амурский государственный университет

г. Благовещенск, Россия

E-mail: grin-vk@amur.so-ups.ru

Maksimova Nadezhda Nikolaevna

Amur State University

Blagoveschensk, Russia

Grin Victoria Konstantinovna

Amur State University

Blagoveschensk, Russia

ИССЛЕДОВАНИЕ СТАЦИОНАРНОЙ МОДЕЛИ ТРАНСПОРТНОГО ПОТОКА НА НЕРЕГУЛИРУЕМОМ ПЕРЕКРЕСТКЕ

INVESTIGATION OF A STATIONARY MODEL OF TRAFFIC FLOW AT AN UNREGULATED INTERSECTION

Аннотация. Представлены вычислительные эксперименты над математической моделью, описывающей транспортный поток на нерегулируемом перекрестке в стационарном режиме. Математическая модель имеет вид системы линейных алгебраических уравнений относительно вероятностей нахождения системы в заданных состояниях. Цель вычислительных экспериментов – определить значения параметров системы для оптимизации транспортного потока.

Abstract. The paper presents computational experiments on a mathematical model describing the traffic flow at an unregulated intersection in a stationary mode. The mathematical model is represented as a system of linear algebraic equations for the probabilities of finding the system in given states. The purpose of computational experiments is to determine the values of the system parameters to optimize the traffic flow.

Ключевые слова: система массового обслуживания, транспортный поток, система линейных алгебраических уравнений, вычислительный эксперимент.

Key words: queuing system, traffic flow, system of linear algebraic equations, computational experiment.

Введение

Современное общество нуждается в постоянном увеличении объема транспортного сообщения, повышении его надежности, безопасности и качества. Это требует увеличения затрат на улучшение инфраструктуры транспортной сети, превращения ее в гибкую, высокоуправляемую логистическую систему. При проектировании транспортных систем необходимо учитывать закономерности развития транспортной сети, распределение загрузки ее участков. Игнорирование этих закономерностей приводит к частому образованию транспортных пробок, перегрузке (недогрузке) отдельных линий и узлов сети, повышению уровня аварийности, экологическому ущербу. В настоящее время важнейшей критерий оценки качества функционирования путей сообщения – пропускная способность [1].

Одним из способов заранее учесть всевозможные ошибки при проектировании транспортных систем является метод математического моделирования. Основы его заложены в 1912 г. русским ученым, профессором Г.Д. Дубелиром. Традиционно в литературе выделяют три подхода к моделированию данных задач – макроскопический [2, 3], микроскопический [4] и мезоскопический [5, 6].

В последнее время в самых разных областях практики возникла необходимость в решении различных вероятностных задач, связанных с работой, так называемых систем массового обслуживания (СМО). Примерами таких систем могут служить: телефонные станции, ремонтные мастерские, билетные кассы, стоянки такси, парикмахерские и т.п. Предметом теории массового обслуживания является построение математических моделей, связывающих заданные условия работы систем массового обслуживания (число каналов, их производительность, характер потока заявок, организация работы и т. п.) с показателями эффективности функционирования СМО [7].

Методы и подходы теории систем массового обслуживания также дают возможность математически описывать развитие транспортной ситуации. В этом случае транспортный поток представляется в виде некоторой системы, при функционировании которой можно выделить конечные состояния, неизвестными величинами будут вероятности нахождения системы в этих состояниях. Сама математическая модель представляется в виде системы дифференциальных уравнений для нестационарной задачи или в виде системы линейных алгебраических уравнений для стационарных процессов.

Стационарная модель транспортного потока на нерегулируемом перекрестке

Рассмотрим перекресток двух дорог (рис. 1), первая из которых является главной, а вторая, примыкающая к главной справа, – второстепенной. Движение по второстепенной дороге разрешено только в одну сторону (соответствует направлению движения по главной дороге). Будем считать, что движение в указанном направлении по каждой из дорог разрешено только по одной полосе. Кроме того, количество автомобилей, которые могут находиться на каждой из дорог (так называемая очередь), ограничено. Известны интенсивности прибытия новых транспортных средств для каждой из дорог (автомобилей за единицу времени), а также интенсивности пересечения перекрестка автомобилем с каждой из дорог (автомобилей за единицу времени). Требуется построить модель транспортного потока при указанных условиях (в стационарном режиме), вычислить основные характеристики системы [8].

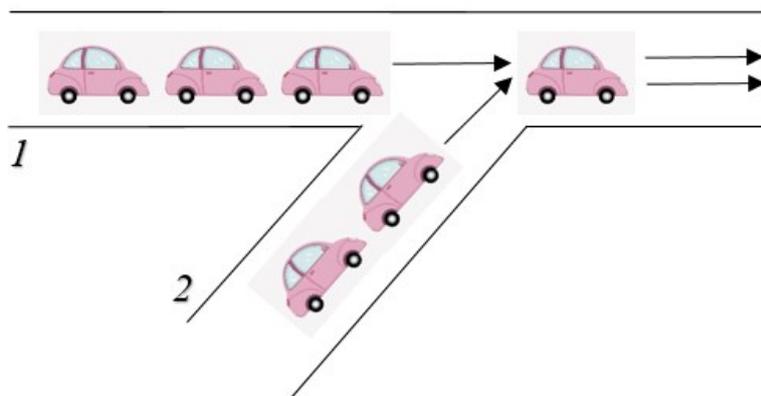


Рис. 1. Представление модели с помощью теории массового обслуживания.

Положим, что на дороге может уместиться конечное число автомобилей: M – на первой дороге, N – на второй.

Также считаем, что транспортный поток может вести себя следующим образом [8]: первая дорога является приоритетной; если первая дорога пуста, а вторая заполнена, через пересечение проезжают машины со второй дороги; если на первой дороге имеются автомобили, то автомобиль со второй может проехать перекресток с вероятностью p^m , где m – число машин на первой (приоритетной) дороге.

Число автомобилей, проехавших с каждой из очередей через сужение, случайно, и для второй очереди зависит от длины первой.

Моделирование описанной ситуации можно осуществить методами теории систем массового обслуживания. Для этого необходимо ввести дискретные состояния каждой возможной ситуации, определить интенсивности входа и выхода для каждого такого состояния и составить систему уравнений, решением которой будет вероятность нахождения системы в каждом из состояний. Положим, что система находится в стационарном состоянии – интенсивности перехода из состояния в состояние не зависят от времени, а также вероятности состояний системы не зависят от времени и от начальных условий. Будем находить предельные значения всех характеристик системы – средние значения вероятностей, длин очередей, времени нахождения в системе.

Введем следующие обозначения [8]: λ_1, λ_2 – интенсивности прибытия автомобилей на первую и вторую дороги соответственно (автомобилей в секунду); обозначим при этом $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$; μ_1, μ_2 – интенсивности проезда через пересечение автомобилей с первой и второй дорог соответственно (автомобилей в секунду).

Состояние системы в произвольный момент времени будем обозначать с помощью трех параметров (i, m, n) , где i – номер дороги, автомобили которой проезжают через пересечение; m – число автомобилей на первой дороге; n – число автомобилей на второй дороге. Введем вероятности состояний системы – $\pi_i(m, n)$.

Для состояния, когда на дорогах нет автомобилей, будем опускать индекс i , так как автомобили не проезжают через пересечение и ни одна из дорог не имеет к нему доступа.

Тем самым система может находиться в $k = M(N + 1) + (M + 1)N + 1$ состояниях, где M и N – максимальное количество автомобилей, которые могут находиться на первой и второй дорогах соответственно. Вероятности нахождения в этих состояниях: $\pi_1(m, n)$ ($m = \overline{1:M}, n = \overline{0:N}$), $\pi_2(m, n)$ ($m = \overline{0:M}, n = \overline{1:N}$), $\pi(0, 0)$.

Составим графы перехода системы в различные состояния из состояний $(1, m, n)$ ($m = \overline{1:M}, n = \overline{0:N}$), $(2, m, n)$ ($m = \overline{0:M}, n = \overline{1:N}$) и $(0, 0)$.

Обозначим I_A – функция-индикатор выражения A : $I_A = \begin{cases} 1, & \text{если } A \text{ верно;} \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$

Первое уравнение равновесия, соответствующее графу на рис. 2 а, имеет вид [8]:

$$\begin{aligned} & (\lambda_1 I_{\{m < M\}} + \lambda_2 I_{\{n < N\}} + \mu_1) \pi_1(m, n) = \\ & = \mu_1 I_{\{m < M\}} \pi_1(m + 1, n) + \lambda_1 I_{\{m > 1\}} \pi_1(m - 1, n) + \\ & + \lambda_2 I_{\{n > 0\}} \pi_1(m, n - 1) + \mu_2 p^m I_{\{n < N\}} \pi_2(m, n + 1), \quad m = \overline{1:M}, n = \overline{0:N}. \end{aligned} \tag{1}$$

Интенсивность выхода из состояния, в котором на первой полосе находится m машин, на второй – n , а система далее продолжает обслуживать первую очередь, равна $(\lambda_1 I_{\{m < M\}} + \lambda_2 I_{\{n < N\}} + \mu_1)$. Это соответствует тому, что может подъехать машина на первой или на второй дороге или пересечение проедет машина с первой дороги. Эта интенсивность может уравниваться следующими интенсивностями входа в это состояние [8]: пересечение проехала одна машина с первой дороги (переход из состояния $(1, m + 1, n)$ с интенсивностью $\mu_1 I_{\{m < M\}}$); на первую дорогу приехала одна машина (переход из состояния $(1, m - 1, n)$ с интенсивностью $\lambda_1 I_{\{m > 1\}}$); на вторую дорогу приехала одна машина (переход из состояния $(1, m, n - 1)$ с интенсивностью $\lambda_2 I_{\{n > 0\}}$); пересечение проехала одна машина со второй дороги (переход из состояния $(2, m, n + 1)$ с интенсивностью $\mu_2 p^m I_{\{n < N\}}$).

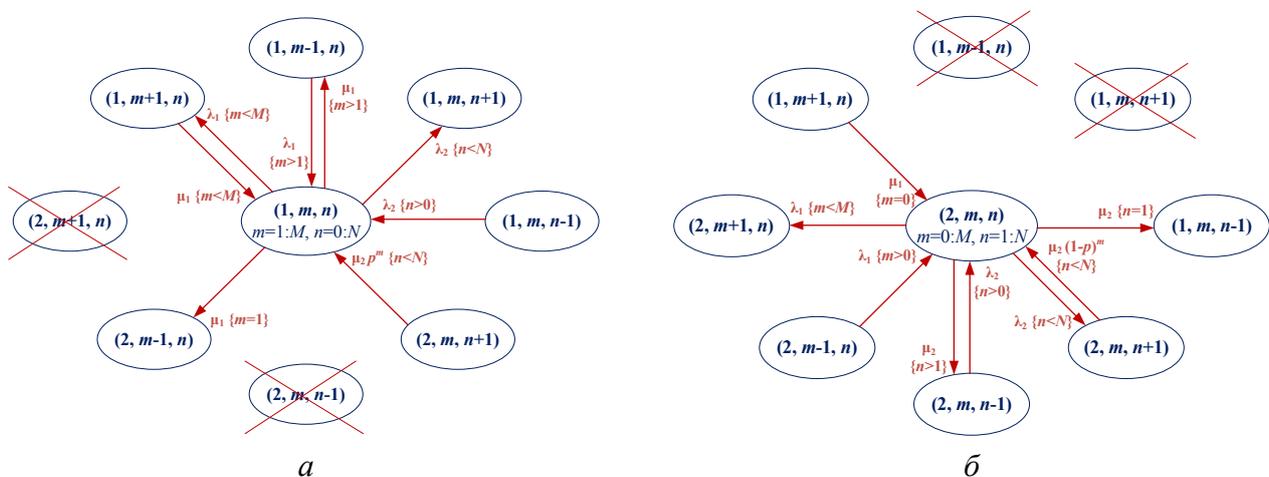


Рис. 2. Графы перехода системы: а – из состояния $(1, m, n)$ ($m = \overline{1:M}, n = \overline{0:N}$); б – из состояния $(2, m, n)$ ($m = \overline{0:M}, n = \overline{1:N}$).

Второе уравнение равновесия, соответствующее графу на рис. 2 б, имеет вид [8]:

$$\begin{aligned}
 & (\lambda_1 I_{\{m < M\}} + \lambda_2 I_{\{n < N\}} + \mu_2) \pi_2(m, n) = \\
 & = \mu_1 I_{\{m=0\}} \pi_1(m+1, n) + \lambda_1 I_{\{m > 0\}} \pi_2(m-1, n) + \\
 & + \lambda_2 I_{\{n > 1\}} \pi_2(m, n-1) + \mu_2 (1-p^m) I_{\{n < N\}} \pi_2(m, n+1), \quad m = \overline{0, M}, n = \overline{1, N}.
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

Интенсивность выхода из состояния, в котором на первой полосе находится m машин, на второй – n , а система далее продолжает обслуживать вторую очередь, равна $(\lambda_1 I_{\{m < M\}} + \lambda_2 I_{\{n < N\}} + \mu_2)$. Это соответствует тому, что может подъехать машина на первой или на второй дороге или пересечение проедет машина со второй дороги. Такая интенсивность может уравниваться следующими интенсивностями входа в это состояние: пересечение проехала одна машина с первой дороги (единственная находящаяся на ней) (переход из состояния $(1, m+1, n)$ с интенсивностью $\mu_1 I_{\{m=0\}}$); на первую дорогу приехала одна машина (переход из состояния $(2, m-1, n)$ с интенсивностью $\lambda_1 I_{\{m > 0\}}$); на вторую дорогу приехала одна машина (переход из состояния $(2, m, n-1)$ с интенсивностью $\lambda_2 I_{\{n > 0\}}$); пересечение проехала одна машина со второй дороги (переход из состояния $(2, m, n+1)$ с интенсивностью $\mu_2 (1-p^m) I_{\{n < N\}}$).

Отдельно рассмотрим переходы из состояний $(1, 1, 0)$, $(2, 0, 1)$ и $(0, 0)$. Граф перехода из состояния $(1, 1, 0)$ представлен на рис. 3, а. Соответствующее уравнение равновесия имеет вид:

$$(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1) \pi_1(1, 0) = \mu_1 \pi_1(2, 0) + \mu_2 p \pi_2(1, 1) + \lambda_1 \pi(0, 0).
 \tag{3}$$

Интенсивность выхода из этого состояния равна $(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1)$. Это соответствует тому, что может подъехать машина на первой или на второй дороге или пересечение проедет машина с первой дороги. Такая интенсивность уравнивается следующими интенсивностями входа в это состояние: пересечение проехала одна машина с первой дороги (переход из состояния $(1, 2, 0)$ с интенсивностью μ_1); на первую дорогу приехала одна машина (переход из состояния $(0, 0)$ с интенсивностью λ_1); пересечение проехала одна машина со второй дороги (переход из состояния $(2, 1, 1)$ с интенсивностью $\mu_2 p$).

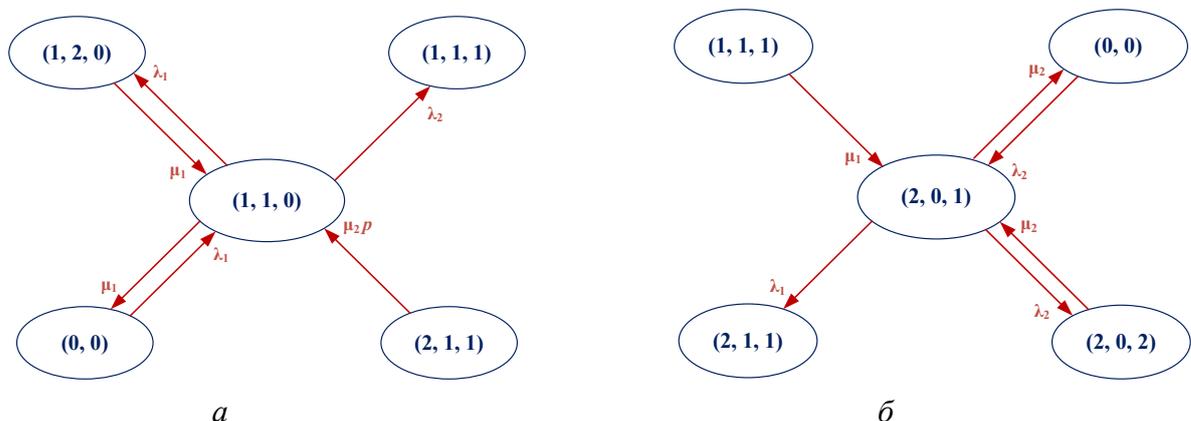


Рис. 3. Графы перехода системы: а – из состояния $(1, 1, 0)$, б – из состояния $(2, 0, 1)$.

Уравнение равновесия для состояния $(2,0,1)$ имеет вид (граф перехода представлен на рис. 3, б) [8]:

$$(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_2)\pi_2(0,1) = \mu_1\pi_1(1,1) + \mu_2\pi_2(0,2) + \lambda_2\pi(0,0). \quad (4)$$

Интенсивность выхода из этого состояния равна $(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_2)$. Это соответствует тому, что может подъехать машина на первой или на второй дороге либо пересечение проедет машина со второй дороги. Такая интенсивность уравнивается следующими интенсивностями входа в это состояние (пересечение проехала одна машина с первой дороги (единственная находящаяся на ней) (переход из состояния $(1,1,1)$ с интенсивностью μ_1); на вторую дорогу приехала одна машина (переход из состояния $(0,0)$ с интенсивностью λ_2); пересечение проехала одна машина со второй дороги: переход из состояния $(2,0,2)$ с интенсивностью μ_2).

Состояние $(0,0)$ уравнивается состояниями $(1,1,0)$ и $(2,0,1)$. Однако нет необходимости отдельно записывать уравнение равновесия для этого графа, поскольку соответствующие уже учтены в уравнениях (3) и (4).

Тем самым получаем уравнения (1)-(4), представляющие собой систему из $(M+1)N + M(N+1)$ линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $(M+1)N + M(N+1) + 1$ финальных вероятностей. Одно недостающее уравнение – это условие нормировки [8]:

$$\pi(0,0) + \sum_{m=1}^M \sum_{n=0}^N \pi_1(m,n) + \sum_{m=0}^M \sum_{n=1}^N \pi_2(m,n) + \sum_{n=1}^N \pi_1(0,n) + \sum_{m=1}^M \pi_2(m,0) = 1. \quad (5)$$

С помощью стационарных вероятностей $\pi_i(m,n)$, $i = \overline{1,2}$ можно найти следующие характеристики [8]:

$$\text{средние длины очередей} - L_1 = \sum_{m=1}^M \sum_{n=0}^N m\pi_1(m,n), L_2 = \sum_{m=0}^M \sum_{n=1}^N n\pi_2(m,n),$$

$$\text{вероятность не застать мест в очереди} - P_1 = \sum_{n=0}^N \pi_1(M,n), P_2 = \sum_{m=0}^M \pi_2(m,N),$$

$$\text{среднее время ожидания в очереди} - W_i = \frac{L_i}{\lambda_i(1-P_i)}, i = \overline{1,2}.$$

Вычислительные эксперименты

Для вычислений были взяты средние значения интенсивности прибытия автомобилей на дороги. Согласно [9], интенсивность движения по главной дороге может составлять до 1800 авт./ч (при двухполосном движении). Будем выбирать значение интенсивности для главной дороги из указанного диапазона; для второстепенной дороги значение интенсивности прибытия рассчитываем исходя из интенсивности на главной дороге с понижающим коэффициентом 0.3-0.7.

Примем, что на главной дороге максимальное количество автомобилей составляет 30 ед., на второстепенной – 10. Интенсивность прибытия автомобилей на главной дороге – $\lambda_1 = 1800$ авт./ч, или 0.5 авт./с, на второстепенной – $\lambda_2 = 1260$ авт./ч, или 0.35 авт./с. Значение параметра вероятности $p = 0.6$.

Время $t_{пр}$, а следовательно, и интенсивность $\mu_{пр} = 1 / t_{пр}$ проезда автомобилем пере-

крестка, зависит от длины транспортного средства, его особенностей, а также характеристик самого перекрестка. Примем, что среднее время проезда перекрестка автомобилем на главной и второстепенной дорогах равны $t_{пр,1} = 2$ сек. и $t_{пр,2} = 4$ сек., тогда интенсивности проезда составят: $\mu_1 = 1/2$ авт./с и $\mu_2 = 1/4$ авт./с.

Получили следующие значения характеристик системы: средние длины очередей – $L_1 = 3.9797$ и $L_2 = 5.9384$ (авт.); вероятность не застать мест для ожидания в очереди – $P_1 = 0.0086$ и $P_2 = 0.2286$; среднее время ожидания в очереди – $W_1 = 8.0283$ и $W_2 = 21.9942$ (сек.).

Исследуем влияние вероятности p проезда пересечения автомобилем со второстепенной дороги. Будем варьировать значение параметра p в промежутке от 0 до 1, с шагом 0.05, при неизменных значениях остальных параметров. Результаты вычислений представлены на рис. 4-6.

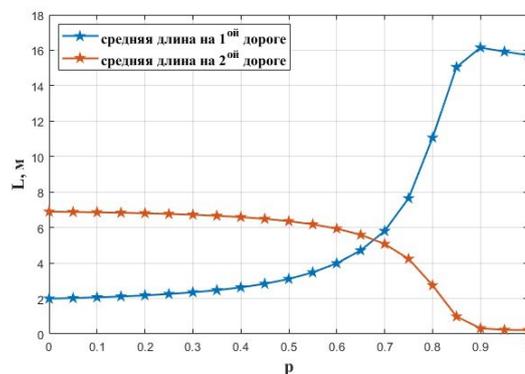


Рис. 4. Зависимость средней длины очереди от вероятности p .

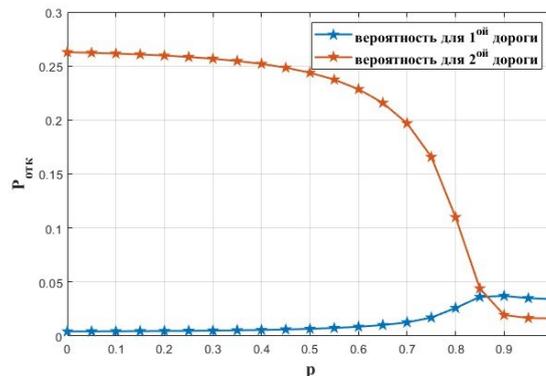


Рис. 5. Зависимость вероятности отказа от вероятности p .

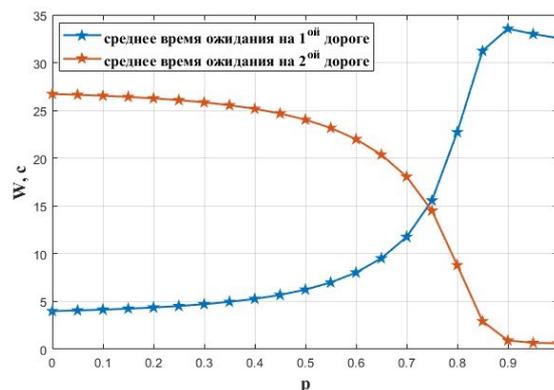


Рис. 6. Зависимость среднего времени ожидания от вероятности p .

Получаем, что с увеличением значения параметра p (т.е. при увеличении «приоритетности» второй, второстепенной дороги) ситуация ухудшается для первой дороги и улучшается для второй. На первой дороге: увеличивается средняя длина очереди с 2 до 16 автомобилей (это составляет половину от всей вместимости дороги); увеличивается вероятность того, что новому автомобилю, подъехавшему к первой дороге, не достанется места с 0.0046 до 0.0342 (но этот показатель не критичен, поскольку значение вероятности отказа меньше 0.04); увеличивается среднее время ожидания с 3.9979 до 32.5549 сек. (что также не критично).

Для второй дороги имеем: уменьшается средняя длина очереди с 7 до 0 автомобилей (максимальная загрузка составляет половину от всей вместимости дороги); уменьшается вероятность того, что новому автомобилю, подъехавшему ко второй дороге, не достанется места, с 0.2628 до 0.0163; уменьшается среднее время ожидания с 26.7240 до 0.6286 сек. (что также не является критичным значением).

Таким образом, при заданных параметрах системы оптимально значение вероятности p от 0.7 до 0.8, т.е. большая «приоритетность» второй дороги. Добиться этого можно, например, установкой светофора (т.е. сделать перекресток регулируемым).

Разумеется, при других значениях параметров системы результаты будут иными.

Зафиксируем значение параметра p равным 0.8 и исследуем влияние максимального количества автомобилей на дорогах. Пусть значения интенсивностей $\lambda_1 = 0.5$ авт./с, $\lambda_2 = 0.35$ авт./с, $\mu_1 = 1/2$ авт./с, $\mu_2 = 1/4$ авт./с, максимальное количество автомобилей на второй дороге N будет равно 10. Результаты расчетов при максимальном количестве автомобилей на первой дороге (M) от 10 до 100 представлены на рис. 7-9.

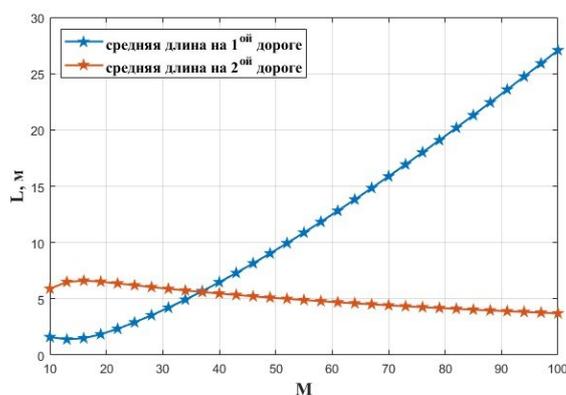


Рис. 7. Зависимость средней длины очереди от значения M при $N = 10$.

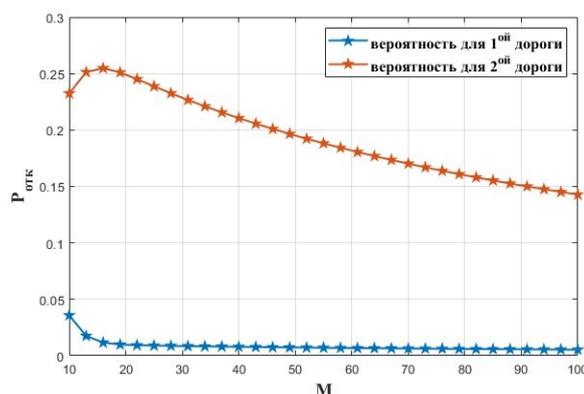


Рис. 8. Зависимость вероятности отказа от значения M при $N = 10$.

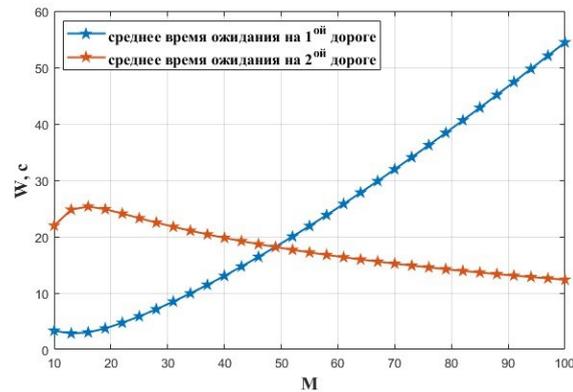


Рис. 9. Зависимость среднего времени ожидания от значения M при $N = 10$.

В результате проведенных вычислений получили: средняя длина очереди на первой дороге растет, но всегда составляет менее 30% от максимальной вместимости, на второй дороге постепенно снижается; вероятность отказа на первой дороге снижается и всегда является достаточно малой, на второй дороге – снижается; среднее время ожидания на первой дороге увеличивается (очевидно, за счет увеличения вместимости), на второй – снижается.

Таким образом, при заданных параметрах оптимальным значением максимальной вместимости на второй дороге является величина M от 30 до 70. Улучшить ситуацию для второй дороги, возможно, поможет увеличение ее максимальной вместимости.

Пусть максимальное количество автомобилей на первой дороге M будет равно 50. Результаты расчетов при максимальном количестве автомобилей на второй дороге (N) от 5 до 40 представлены на рис. 10-12.

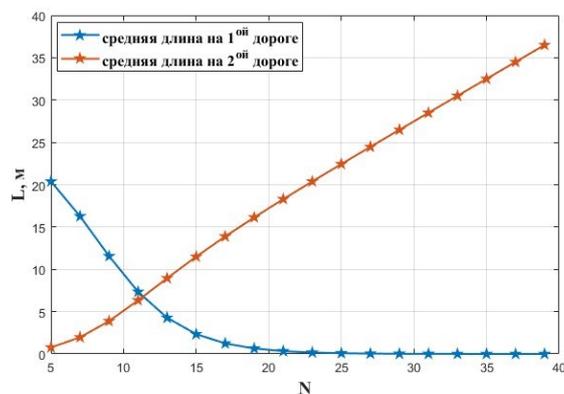


Рис. 10. Зависимость средней длины очереди от значения N при $M = 50$.

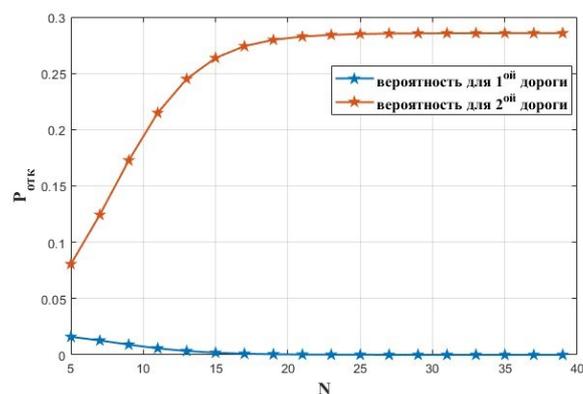


Рис. 11. Зависимость вероятности отказа от значения N при $M = 50$.

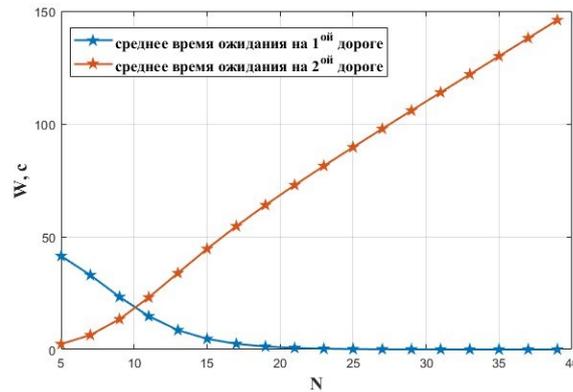


Рис. 12. Зависимость среднего времени ожидания от значения N при $M = 50$.

В результате проведенных вычислений получили следующее: средняя длина очереди на первой дороге уменьшается, на второй дороге растет, при этом дорога всегда остается максимально загруженной (около 90% от максимальной вместимости); вероятность отказа на первой дороге по-прежнему снижается и всегда достаточно мала, на второй – увеличивается; среднее время ожидания на первой дороге снижается, а на второй дороге увеличивается (за счет увеличения вместимости).

Тем самым получаем, что при заданных параметрах увеличение максимальной вместимости не разгрузит транспортный поток на второй дороге. Улучшить ситуацию на ней поможет увеличение ее пропускной способности (например, при установке светофора).

Построим таблицу минимальных значений для основных характеристик при одновременном варьировании M от 10 до 70 и N от 5 до 30 (табл. 1).

Минимальные значения характеристик системы

Соответствующая вместимость дорог	Минимальное значение характеристики					
	L_1	L_2	P_1	P_2	W_1	W_2
	0.0096	0.5855	$1.795 \cdot 10^{-5}$	0.0611	0.0191	1.7816
M_{min}	30	70	70	70	30	70
N_{min}	29	5	29	5	29	5

Таким образом, при разных критериях оптимизации транспортного потока (минимизация средней длины очереди, вероятность отказа или времени ожидания) на каждой из дорог получим разные значения вместимостей.

Заключение

Математическое моделирование является удобным и мощным средством для исследования закономерностей нашего мира и происходящих в нем процессов. Исследование транспортных потоков и выявление зависимостей характеристик транспортной системы от ее параметров также можно проводить методами математического моделирования. Одним из подходов к моделированию транспортных потоков является теория систем массового обслуживания. В работе исследована математическая модель транспортного потока на нерегулируемом перекрестке в стационарном случае. Варьирование параметров системы позволяет сделать выводы о загрузке перекрестка и подобрать оптимальные значения этих параметров.

1. Семенов, В.В. Математическое моделирование динамики транспортных потоков мегаполиса // Институт прикладной математики им. М.В.Келдыша РАН. – 2008. – Вып. 10. – С. 1-45.
2. Введение в математическое моделирование транспортных потоков: учеб. пособие / Гасников А.В., Кленов С.Л., Нурминский Е.А., Холодов Я.А., Шамрай Н.Б.; Приложения: Бланк М.Л., Гасникова Е.В., Замятин А.А. и Малышев В.А., Колесников А.В., Райгородский А.М; под ред. А.В. Гасникова. – М.: МФТИ, 2010. – 362 с.
3. Власов, А.А. Теория транспортных потоков: моногр. – Пенза: ПГУАС, 2014. – 124 с.
4. Сильянов, В.В. Имитационное моделирование транспортных потоков в проектировании дорог / В.В. Сильянов, В.М. Ерёмин, Д.И. Муравьёва. – М.: МАДИ, 1961. – 119 с.
5. Ben-Akiva, M.E. Real-time simulation of traffic demand–supply interactions within DynaMIT. In M. Gendreau, & P. Marcotte (Eds.) / M.E. Ben-Akiva, M. Bierlaire, D. Burton, H.N. Koutsopoulos, Mishalani R. // Transportation and network analysis, 2002. – P. 19-36.
6. Mahmassani, H.S. Dynamic network traffic assignment and simulation methodology for advanced system management applications // Networks and Spatial Economics. – 2001. – №1. – P. 267–292.
7. Плескунов, М.А., Теория массового обслуживания. – Екатеринбург: Изд-во Уральского университета, 2022. – 264 с.
8. Семенов, В.В. Математическое моделирование транспортного потока на нерегулируемом пересечении // Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН. – 2008. – Т. 20, №10. – С. 14-22.
9. Методические рекомендации по оценке пропускной способности автомобильных дорог. Отраслевой дорожный методический документ. – М.: Федеральное дорожное агентство (РОСАВТОДОР), 2012. – 110 стр. – Режим доступа: <https://rosavtodor.gov.ru/storage/app/media/uploaded-files/218.2.020-2012.pdf>