УДК 519.857

Сельвинский Владимир Владимирович
Амурский государственный университет
г. Благовещенск, Россия
E-mail: selvinvv@mail.ru
Сысоев Алексей Евгеньевич
Амурский государственный университет
г. Благовещенск, Россия
E-mail: s.aleksey@everest.ooo
Selvinsky Vladimir Vladimirovich
Amur State University
Blagoveshchensk, Russia
E-mail: selvinvv@mail.ru
Sysoev Aleksey Evgeneyevich
Amur State University
Blagoveshchensk, Russia
E-mail: s.aleksey@everest.ooo

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ КОНКУРЕНЦИИ ПРЕДПРИЯТИЙ

MATHEMATICAL MODEL OF ENTERPRISE COMPETITION

Аннотация. ***В статье формируется математическая модель конкуренции двух предприятий, производящих однородную продукцию, имеющих общий рынок сбыта и общий источник ресурсов (сырья). На основе математического пакета MathCad проводится исследование результатов деятельности предприятий при различных вариантах условий производства.***

Abstract. In this article, a mathematical model competition is formed between two enterprises that produce homogeneous production and have a common sales market and a common source of resources (raw materials). On the basis of MathCad mathematical package, it is carried out to follow the results of enterprises under various versions of production conditions.

Ключевые слова: математическая модель, дифференциальные уравнения, конкуренция предприятий, прибыль предприятия.

Key words: mathematical model, differential equations, enterprise competition, enterprise profit.

При функционировании конкурирующих предприятий, производящих однотипную продукцию, имеющих один рынок сбыта и один источник ресурсов (сырья), возникает конфликт интересов при реализации избытков продукции и неполной обеспеченности производства ресурсами. Избыток продукции появляется при условии ограниченности ее спроса на рынке сбыта, а дефицит ресурсов – при условии ограниченности их предложения. Все это следствие естественного развития производства – повышения производительности труда, увеличения объемов производства.

В качестве основы функционирования индивидуального предприятия используем математическую модель, сформированную в работе [2]. Закономерности конкурентной борьбы будем исследовать на примере двух предприятий. Основными показателями деятельности предприятий будем считать прибыль x_i (руб; $i = 1, 2$) и стоимость оборудования y_i (руб; $i = 1, 2$).

Самую существенную роль в оценке эффективности деятельности предприятия играет функция дохода $p_i = p_i(y_i)$ $(\text{руб./ед. врем.};\ i = 1,\ 2)$. Она представляют собой доход предприятия от реализации продукции в единицу времени и имеют структуру [2], индивидуальную для каждого предприятия:

$$p_i = p_i(y_i) = \begin{cases} \mu_{0i} y_i + \mu_{1i} y_i^2, & y_i \geq 0; \\ 0, & y_i < 0, \end{cases} \tag{1}$$

где μ_{0i} – коэффициент эффективности вложения средств в оборудование (1/ед. врем., i =1,2); μ_{1i} – коэффициент эффективности вложения дополнительных и стимулирующих средств в кадровое обеспечение (1/руб. /ед. врем., i=1,2).

Заметим, что из-за ограниченности ресурсов значение функции дохода $p_i = p_i(y_i)$ $(i = 1,\ 2)$ не может превышать $p_i^* = \alpha_i \cdot \delta_r r_i^*$, соответствующее некоторому значению y_i^*, поэтому, с учетом монотонности функции $p_i = p_i(y_i)$, при $p_i(y_i) > p_i^*$ полагаем $p_i = p_i(y_i^*) = p_i^*$, а разность $y_i - y_i^* > 0$ в этом случае переводим в прибыль $x_i + y_i - y_i^* > x_i$. Здесь, как и в [2]:

α_i $(i = 1, 2)$ – рыночная цена продукции i-го предприятия (руб./ед. продукции); δ_r – коэффициент ресурсоемкости (количество товара/ использованное количество ресурса = б/разм.); r_i – интенсивность использования сырья (ед. ресурса /ед. врем.), $r_i \leq r_i^*$.

Одним из цивилизованных способов конкурентной борьбы данного предприятия является гибкая ценовая политика, допускающая понижение цен на продажу товара и повышение закупочных цен на ресурсы с целью увеличения доли продаж и доли ресурсов, а в конечном счете – получения более высокой прибыли. Конкурентная борьба исчезает, когда происходит экономическое подавление одного из конкурентов либо существенно расширяются рынок сбыта товара и рынок ресурсов.

Разумная политика распределителя ресурсов состоит в как можно более продолжительном сохранении конкуренции, даже при более выгодных на данный момент закупочных ценах одного из конкурирующих предприятий. В противном случае образуется монополия, которая в дальнейшем будет диктовать свои цены на сырье. Это положение реализуется в рамках следующей аукционной схемы. Пусть: $\Delta\hat{R}_1, \Delta\hat{R}_2$ – заявки двух конкурирующих предприятий на объемы ресурсов с предлагаемыми закупочными ценами $\alpha_{r1}, \alpha_{r2} \geq \alpha_r$ соответственно (α_r – действующая закупочная цена ресурсов при отсутствии дефицита); ΔR^* – максимально возможный на данный момент объем распределяемого ресурса. Если дефицит отсутствует

$$\Delta\hat{R}_1 + \Delta\hat{R}_2 < \Delta R^*,$$

то естественно считать

$$\alpha_{r1} = \alpha_{r2} = \alpha_r, \ \ \Delta R_1 = \Delta\hat{R}_1, \qquad \Delta R_2 = \Delta\hat{R}_2,$$

($\Delta R_1, \Delta R_2$ – реальные объемы ресурсов, выделенные предприятиям), то есть заявки удовлетворены в полном объеме, с минимальной закупочной ценой. Если

$$\Delta\hat{R}_1 + \Delta\hat{R}_2 \geq \Delta R^*,$$

то следует положить

$$\Delta R_i = \Delta R_i^* = \eta_i \Delta\hat{R}_i, \qquad \eta_i \leq 1, \qquad (i = 1, 2) \tag{2}$$

Так, чтобы

$$\Delta R_1^* + \Delta R_2^* = \Delta R^*; \tag{3}$$

коэффициенты $\eta_1, \ \eta_2$ определяются с учетом отношения предлагаемых закупочных цен, – например:

$$\frac{\eta_2}{\eta_1} = \left(\frac{\alpha_{r2}}{\alpha_{r1}}\right)^k, \tag{4}$$

где $k > 1$ – показатель усиления различия закупочных цен. Получаем

$$\eta_1 = \frac{\alpha_{r1}^k \Delta R^*}{\alpha_{r1}^k \Delta\hat{R}_1 + \alpha_{r2}^k \Delta\hat{R}_2}, \qquad \eta_2 = \frac{\alpha_{r2}^k \Delta R^*}{\alpha_{r1}^k \Delta\hat{R}_1 + \alpha_{r2}^k \Delta\hat{R}_2} \tag{5}$$

– коэффициенты распределения ресурсов. Если какой–либо из коэффициентов $\eta_1, \ \eta_2$ оказывается больше единицы (например, η_2), то полагаем

$$\eta_2 = 1\,, \quad \eta_1 = \frac{\Delta R^* - \Delta\hat{R}_2}{\Delta\hat{R}_1} \tag{5'}$$

Так, чтобы выполнялось (3). Соответственно, если оказалось, что $\eta_1 > 1$, то полагаем

$$\eta_1 = 1, \ \ \eta_2 = \frac{\Delta R^* - \Delta\hat{R}_1}{\Delta\hat{R}_2}. \tag{5''}$$

Формулы (2)–(5) позволяют стимулировать повышение закупочных цен, сохраняя открытую конкуренцию на приобретение ресурсов.

Если использовать обозначения:

$$\Delta R^* = r^* \Delta t, \ \ \Delta R_i^* = r_i^* \Delta t, \ \ \Delta\hat{R}_i = \frac{\Delta\hat{V}_i}{\delta_r} = \frac{\hat{p}_i}{\delta_r \alpha_i} \Delta t, \ \ (i = 1, 2), \ \ \zeta = \frac{\alpha_{r2}}{\alpha_{r1}}, \tag{6}$$

то формулы (5) приобретают вид

$$\eta_1 = \frac{\delta_r \alpha_1 \alpha_2 \cdot r^*}{\hat{p}_1 \alpha_2 + \hat{p}_2 \alpha_1 \zeta^k}, \qquad \eta_2 = \frac{\delta_r \alpha_1 \alpha_2 \cdot r^* \zeta^k}{\hat{p}_1 \alpha_2 + \hat{p}_2 \alpha_1 \zeta^k}\,, \tag{6'}$$

где $\hat{p}_i \ \ (i = 1, 2)$ – предполагаемый доход i-го предприятия при реализации продукции объемом $\Delta\hat{V}_i$ в случае полного удовлетворения потребности в ресурсах, при этом

$$\hat{p}_1 \alpha_2 + \hat{p}_2 \alpha_1 > \delta_r \alpha_1 \alpha_2 \cdot r^* \tag{7}$$

– условие общего дефицита ресурсов.

Если какой–либо из коэффициентов $\eta_1, \ \eta_2$ оказывается больше единицы, – например, η_2, то полагаем

$$\eta_1 = \frac{\delta_r \alpha_1 \alpha_2 \cdot r^* - \hat{p}_2 \alpha_1}{\hat{p}_1 \alpha_2}, \ \ \eta_2 = 1; \tag{7'}$$

если оказывается $\eta_1 > 1$, то полагаем

$$\eta_2 = \frac{\delta_r \alpha_1 \alpha_2 \cdot r^* - \hat{p}_1 \alpha_2}{\hat{p}_2 \alpha_1}, \;\; \eta_1 = 1. \qquad (7'')$$

Пусть теперь $\Delta V = c \cdot \Delta t$ – общий объем товара, соответствующий рыночному спросу c за время Δt;

$$\Delta \tilde{V}_i = \frac{\hat{p}_i}{\alpha_i} \Delta t \qquad (i = 1,\; 2)$$

– объем товаров, который может произвести i-е предприятие с учетом ограничения на ресурсы. Если

$$c < \frac{\hat{p}_1}{\alpha_1} + \frac{\hat{p}_2}{\alpha_2} \le \delta_r \cdot r^*, \qquad (8)$$

то доход создает только та часть товара, которая будет реализована, что соответствует значениям $p_1 = \kappa_1 \hat{p}_1, \;\; p_2 = \kappa_2 \hat{p}_2$, так что

$$\kappa_1 \frac{\hat{p}_1}{\alpha_1} + \kappa_2 \frac{\hat{p}_2}{\alpha_2} = c; \qquad (9)$$

коэффициенты $\kappa_1, \; \kappa_2$ отражают различие розничных цен на продаваемую продукцию, – например,

$$\frac{\kappa_2}{\kappa_1} = \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^l, \qquad (10)$$

где $l > 1$ – показатель усиления (здесь зависимость обратная, так как чем больше цена, тем меньше доля продаж). Получаем

$$\kappa_1 = \frac{\alpha_1 c \cdot \tau^{l+1}}{\hat{p}_1 \cdot \tau^{l+1} + \hat{p}_2}, \;\; \kappa_2 = \frac{\alpha_2 c}{\hat{p}_1 \cdot \tau^{l+1} + \hat{p}_2}, \;\; \tau = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}, \;\; \kappa_i \le 1 \;\; (i = 1,\; 2); \qquad (11)$$

при условии (8) товар реализуется не в полном объеме, остатки соответствуют величинам

$$d_i = \frac{\hat{p}_i}{\alpha_i}(1 - \kappa_i) \;\; (i = 1,\; 2),$$

пропорционально которым предприятие несет расходы на хранение или утилизацию, $\lambda_i d_i$ $(i = 1,\; 2)$, где λ_i – коэффициенты потерь на хранение.

Если какой–либо из коэффициентов $\kappa_1, \; \kappa_2$ оказывается больше единицы, например κ_2, то полагаем

$$\kappa_1 = \frac{\alpha_1(\alpha_2 \cdot c - \hat{p}_2)}{\hat{p}_1 \alpha_2}, \quad \kappa_2 = 1; \qquad (11')$$

если $\kappa_1 > 1$, то полагаем

$$\kappa_2 = \frac{\alpha_2(\alpha_1 \cdot c - \hat{p}_1)}{\hat{p}_2 \alpha_1}, \quad \kappa_1 = 1. \qquad (11'')$$

Математическую модель конкуренции двух предприятий составляем аналогично модели функционирования каждого предприятия в отдельности с элементами распределения рынка сбыта и рынка ресурсов.

Исходным считается состояние $x_i = \tilde{x}_i, \; y_i = \tilde{y}_i \; (i = 1,\; 2)$, по которому рассчитываются значения $\hat{p}_i = p_i(\tilde{y}_i) \; (i = 1,\; 2)$. Если обозначить

$$m = min\{\, c, \; \delta_r \cdot r^*\}$$

и предварительно потребовать

$$p_i = \eta_i \hat{p}_i, \;\; \eta_i \le 1 \quad (i = 1,\; 2), \qquad (12)$$

так что в случае

$$\frac{\hat{p}_1}{\alpha_1}+\frac{\hat{p}_2}{\alpha_2}>\delta_r\cdot r^*$$

формулы (6) – (7″) будут обеспечивать начальные условия:

$$\frac{p_{10}}{\alpha_1}+\frac{p_{20}}{\alpha_2}=\delta_r\cdot r^*,\;\; y_{i0}:p_i(y_{i0})=p_{i0},\;\; x_{i0}=\tilde{x}_i+\tilde{y}_i-y_{i0}, \quad (13)$$

имеем следующую динамику:

а) если

$$\frac{p_{10}}{\alpha_1}+\frac{p_{20}}{\alpha_2}\le m$$

то

$$\frac{dx_i}{dt}=\frac{(1-\nu_{ri})p_i-(\beta_i+\gamma_i)y_i}{1+\delta_{2i}\left(1-\frac{p_1}{\alpha_1\cdot m}-\frac{p_2}{\alpha_2\cdot m}\right)}, \quad (14)$$

$$\frac{dy_i}{dt}=\frac{\delta_{2i}}{1+\delta_{1i}}\left(1-\frac{p_1}{\alpha_1\cdot m}-\frac{p_2}{\alpha_2\cdot m}\right)\frac{dx_i}{dt},\;\; (i=1,\;2);$$

б) если

$$\frac{p_{10}}{\alpha_1}+\frac{p_{20}}{\alpha_2}>c,$$

то

$$\frac{dx_i}{dt}=(\kappa_i-\nu_{ri})p_i-(\beta_i+\gamma_i)y_i-\lambda_i p_i(1-\kappa_i), \quad (15)$$

$$\frac{dy_i}{dt}=\frac{\delta_{2i}}{1+\delta_{1i}}\left(1-\frac{1}{\kappa_i}\right)\frac{dx_i}{dt},\quad (i=1,\;2);$$

здесь κ_i $(i=1,\;2)$ подчиняются условиям (11) - (11"); ν_{ri} – коэффициент ценовой ресурсоемкости

$$\nu_{ri}=\frac{\alpha_{ri}}{\alpha_i\cdot\delta_r}\quad (i=1,\;2); \quad (16)$$

$\delta_{1i},\;\delta_{2i},\;\beta_i,\;\gamma_i$ – коэффициенты пропорциональности в соответствии с [2].

Все вышесказанное позволяет сформировать пошаговый алгоритм, реализующий процесс возникновения и развития конкуренции двух предприятий, производящих однородную продукцию, имеющих один и тот же рынок сбыта и источник ресурсов.

1. Исходные данные:

$c, r^*,\;\alpha_i,\;\alpha_{ri},\;k,\;l,\;\beta_i,\;\gamma_i,\;\delta_{1i},\;\delta_{2i},\;\delta_r,\;\mu_{0i},\;\mu_{1i},\;\lambda_i$ – задаваемые параметры; ν_{ri}, ζ, τ $(i=1,\;2)$ – дополнительные параметры, вычисляются по формулам (6), (11), (16).

2. Начальное состояние предприятий: $\tilde{x}_i,\;\tilde{y}_i$ – значения задаются.

3. Вычисление предварительных значений функций дохода по (1):

$$\hat{p}_i=p_i(\tilde{y}_i)\quad (i=1,\;2).$$

4. Проверка условий:

$$c<\frac{\hat{p}_1}{\alpha_1}+\frac{\hat{p}_2}{\alpha_2}\le\delta_r\cdot r^*.$$

5. Выбор варианта начальных условий:

если

$$\frac{\hat{p}_1}{\alpha_1} + \frac{\hat{p}_2}{\alpha_2} > \delta_r \cdot r^*,$$

то выполняется перерасчет начального состояния, $p_{i0} = \eta_i \hat{p}_i$ (η_i вычисляем по формулам (6′) – (7″)), y_{i0} : $p_i(y_{i0}) = p_{i0}$ (из формулы (1)), $x_{i0} = \tilde{x}_i + \tilde{y}_i - y_{i0}$;

если

$$\frac{\hat{p}_1}{\alpha_1} + \frac{\hat{p}_2}{\alpha_2} \le \delta_r \cdot r^*,$$

то оставляем $p_{i0} = \hat{p}_i$, $x_{i0} = \tilde{x}_i$, $y_{i0} = y_i$.

6. Выбор дифференциальной системы:

если

$$\frac{p_{10}}{\alpha_1} + \frac{p_{20}}{\alpha_2} \le c,$$

то выбираем (14);

если

$$\frac{p_{10}}{\alpha_1} + \frac{p_{20}}{\alpha_2} > c,$$

то выбираем (15), коэффициенты κ_i вычисляются по формулам (11)-(11″).

7. Далее выполняется шаг вычислительного процесса по Δt, достаточно малый, чтобы уловить момент возможного нарушения условий выбора дифференциальной системы или варианта начальных условий.

Конечное состояние предприятий после выполненного шага рассматривается как начальное для последующего шага, и вычислительный процесс возобновляется, начиная с пункта 2.

8. Вычислительный процесс заканчивается, если какие–либо из переменных x_i, y_i становятся отрицательными (соответствующее предприятие перестает существовать) либо для переменных y_i устанавливаются предельные положительные значения, т.е. оба производства стабилизируются и сосуществуют.

Сформированная математическая модель позволяет анализировать характерные особенности конкуренции предприятий и выбирать наиболее благоприятную стратегию хозяйственной деятельности. Например:

1) Влияние соотношения начальных капиталов y_{10}, y_{20} на рост прибыли $Dx1$, $Dx2$ и рентабельность $Rx1 = Dx1/y_{10}$, $Rx2 = Dx2/y_{20}$ предприятий,

$$C = 600, \quad R = 600, \quad x = y_{10} \le y_{20} = 100.$$

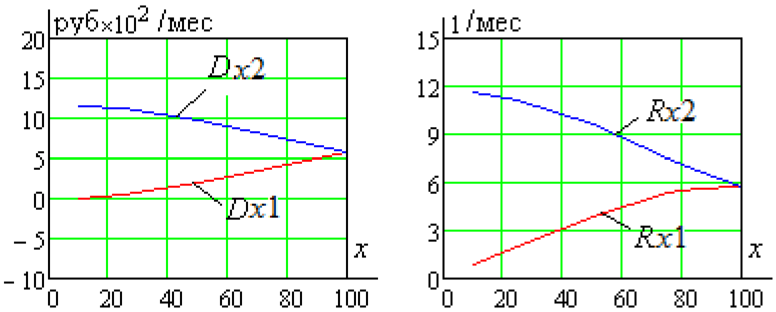

Рис. 1. Влияние начальных капиталов y_{10}, y_{20} на рост прибыли и рентабельность.

Анализ зависимостей, изображенных на рис. 1, свидетельствует, что при прочих равных условиях и фиксированном начальном капитале 2-го предприятия, $y_{20} = 100$, увеличение начального капитала 1-го предприятия в интервале $(0,\ 100)$ приводит к повышению роста его доходов $Dx1$, а также к повышению его рентабельности $Rx1$. При этом рост доходов $Dx2$ и рентабельность $Rx2$ второго предприятия падают.

2) Влияние соотношения $\tau = \alpha_1/\alpha_2$ цен продажи на рост $Dx1,\ Dx2$ прибыли предприятий в условиях переизбытка ресурсов, $C < R$:

$$C = 500,\quad R = 600,\quad \alpha_1 = \tau \cdot \alpha,\quad \alpha_2 = \alpha = 4,\quad 0 < \tau \le 1.$$

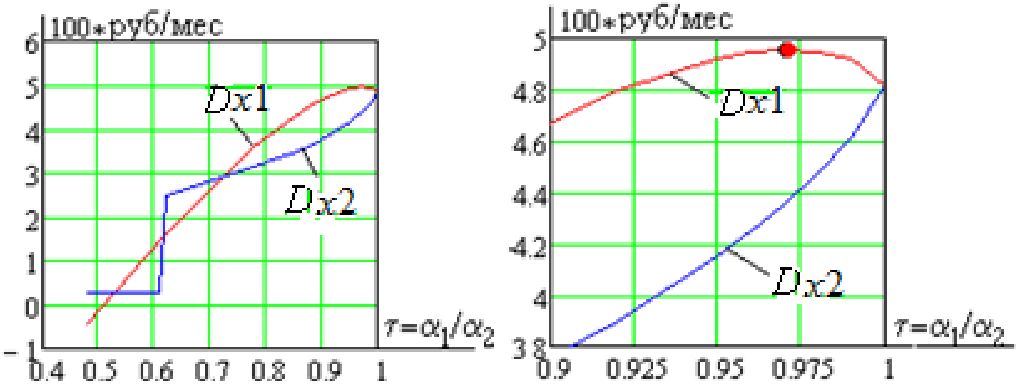

Рис. 2. Влияние соотношения цен продажи продукции на рост прибыли.

Анализ зависимости, изображенной на рисунке 2, говорит о том, что при фиксированной цене продукции 2-го предприятия, $\alpha_2 = 4$, и при прочих равных условиях небольшое понижение цены α_1 продукции 1-го предприятия приводит к росту его доходов и достаточно резкому понижению роста доходов второго предприятия. Это результат повышения ценовой привлекательности продукции 1-го предприятия и возможности расширения его производства. При более существенном понижении цены (ниже $\tau = \alpha_1/\alpha_2 \approx 0{,}97$) рост доходов обоих предприятий падает. Дальнейшее понижение цены за $\tau \approx 0{,}73$ теряет практический смысл. Очевидно, что при дефиците ресурсов, $R < C$ имеет смысл только повышение цен на продажу продукции.

1. Лебедев, В.В. Математическое и компьютерное моделирование в экономике / В.В. Лебедев, К.В. Лебедев. – М.: НВТ-Дизайн, 2015. – 256 с.

2. Сельвинский, В.В. Математическая модель конкурентоспособности предприятия // Вестник Амурского государственного университета. – 2022. – Вып. 99: Сер. «Естеств. и экон. науки». – С. 3-7.