

**Энергетика . Автоматика**

УДК 669.187.2

**Козлов Александр Николаевич**

Амурский государственный университет,

г. Благовещенск, Россия

*E-mail:* [kozlov1951@yandex.ru](mailto:kozlov1951@yandex.ru)**Козлова Татьяна Сергеевна**

ПАО «Дальневосточная энергетическая компания»,

г. Благовещенск, Россия

*E-mail:* [omed2@amur.dvec.ru](mailto:omed2@amur.dvec.ru)**Kozlov Alexander Nikolaevich**

Amur State University,

Blagoveshchensk, Russia

*E-mail:* [kozlov1951@yandex.ru](mailto:kozlov1951@yandex.ru)**Kozlova Tatyana Sergeevna**

Far Eastern Energy Company PJSC,

Blagoveshchensk, Russia

*E-mail:* [omed2@amur.dvec.ru](mailto:omed2@amur.dvec.ru)**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СЛУЧАЙНОЙ СОСТАВЛЯЮЩЕЙ  
ТОКОВ ДУГОВОЙ СТАЛЕПЛАВИЛЬНОЙ ПЕЧИ****MATHEMATICAL MODEL OF RANDOM COMPONENT  
OF CURRENTS OF ARC STEEL-MELTING FURNACE**

*Аннотация.* Рассмотрено моделирование случайного стационарного процесса, спектральная плотность которого постоянна на всех частотах (т.н. «белый шум»).

*Abstract.* The simulation of a random stationary process, the spectral density of which is constant at all frequencies (the so-called "white noise"), is considered.

*Ключевые слова:* дуговая сталеплавильная печь, генератор псевдослучайных чисел, белый шум.

*Key words:* arc steel furnace, pseudorandom number generator, white noise.

**DOI: 10.22250/20730268\_2023\_101\_78**

Чтобы получить реализацию какого-либо случайного процесса с заданной спектральной плотностью (или с заданной корреляционной функцией), применяют преобразование сигнала «белый шум» с помощью фильтра, имеющего дробно-рациональную передаточную функцию (спектральная плотность сигнала «белый шум» постоянна для всего интервала угловых частот от нуля до бесконеч-

ности). Зависимость квадрата амплитуды частотной характеристики от частоты у такого фильтра должна быть близка к заданной спектральной плотности [1, 3]. Дробно-рациональное выражение спектральной плотности случайного процесса позволяет дать математическое описание этого процесса в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений и тем самым непосредственно получать временные характеристики. Этот способ в полной мере относится и к моделированию во временной области случайной составляющей токов дуговой сталеплавильной печи.

*Моделирование «белого шума».* Белым шумом называют случайный стационарный процесс, спектральная плотность которого постоянна на всех частотах [1, 2]. В несовпадающие моменты времени значения такого процесса некоррелированы – как бы ни был мал интервал между этими моментами времени, белый шум за это время может измениться на любую величину. Белый шум является абстракцией и физически существовать не может, так как его дисперсия бесконечно велика (она пропорциональна интегралу с бесконечными пределами от спектральной плотности) [3].

Программы компьютерной математики генерируют сигнал, близкий к дискретному белому шуму, в виде дискретного случайного процесса, отсчеты которого не коррелированы друг с другом [3, 4]. Верхняя граница спектра этого сигнала в отличие от случая аналогового белого шума конечна. Она равна так называемой частоте Найквиста [1]. Круговая частота Найквиста определяется выражением,  $\omega N = \pi/T$ , где  $T$  – период дискретизации. Эта частота в два раза меньше круговой частоты дискретизации  $\omega_D = 2\pi/T$ . Дисперсия дискретного белого шума не является бесконечной. Она равна начальному отсчету корреляционной функции, все остальные отсчеты которой для идеального дискретного белого шума равны нулю [3].

Можно создавать численные последовательности (векторы) с равномерным законом распределения случайных величин, а также с нормальным и другими законами распределения, которые получаются из последовательности с равномерным распределением (для получения случайной величины с заданным распределением преобразуют случайную величину с равномерным распределением, используя соответствующее нелинейное преобразование) [3].

Для моделирования случайного процесса удобнее генерировать сигнал с равномерным распределением, так как, во-первых, эту операцию способны выполнять все наиболее распространенные программы компьютерной математики. Во-вторых, гистограммы, соответствующие равномерному распределению, позволяют наглядным образом получить ответы на следующие вопросы: насколько равномерно распределены компоненты вектора при избранном способе его генерации, правильно ли выбраны границы интервала генерации, достаточно ли количество отсчетов, являющихся компонентами вектора? И, в-третьих, распределение, полученное в результате такого моделирования, оказывается достаточно близким к нормальному закону [3].

Программы компьютерной математики имеют генераторы псевдослучайных чисел с равномерным распределением. Генерируемые числа не являются строго случайными, но их количество в повторяющейся последовательности очень велико.

Дисперсия бесконечной последовательности равномерно распределенных в диапазоне от  $a$  до  $b$  чисел (идеального белого шума) определяется выражением [1, 3]:

$$D_{iwn} = \frac{(b-a)^2}{12}, \quad (1)$$

Так как математическое ожидание случайного процесса равно нулю, то для моделирования этого процесса следует использовать центрированную последовательность (с нулевым значением математического ожидания при бесконечном числе отсчетов и идеальном равномерном распределении). При этом абсолютные значения границ диапазона одинаковы. Программы компьютерной математики в качестве границ используют целые числа. Примем, что  $b = N_r$ , а  $a = -N_r$ . Тогда [1, 3]:

$$D_{iwn} = \frac{N_r^2}{3}. \quad (2)$$

В качестве примера приведем команду генерирования такой последовательности в системе компьютерной математики *Maple* с применением пакета *Statistics*

$$r_n := \text{random}[\text{discreteuniform}[-N_r, N_r]](N), \quad (3)$$

где  $N$  – число членов последовательности (объем выборки);  $N_r$  – граница распределения.

О равномерности распределения чисел в генерируемой последовательности можно судить по виду гистограммы. На рис. 1 построены гистограммы относительных частот [3, 5] трех псевдослучайных последовательностей, созданных системой *Maple* при одинаковом объеме выборки –  $N=100000$  и разных границах равномерного распределения  $N_r$ : 10, 100 и 1000.

Следует отметить, что вид гистограмм при одних и тех же значениях  $N_r$  и  $N$  не одинаков, он зависит от выбора первого числа последовательности. В системе *Maple* после каждой очистки внутренней памяти создается одно и то же первое число, зависящее от  $N_r$ , и одна и та же последовательность. При каждом новом обращении к команде (3), без очистки внутренней памяти, генерируется новая последовательность цифр [3].

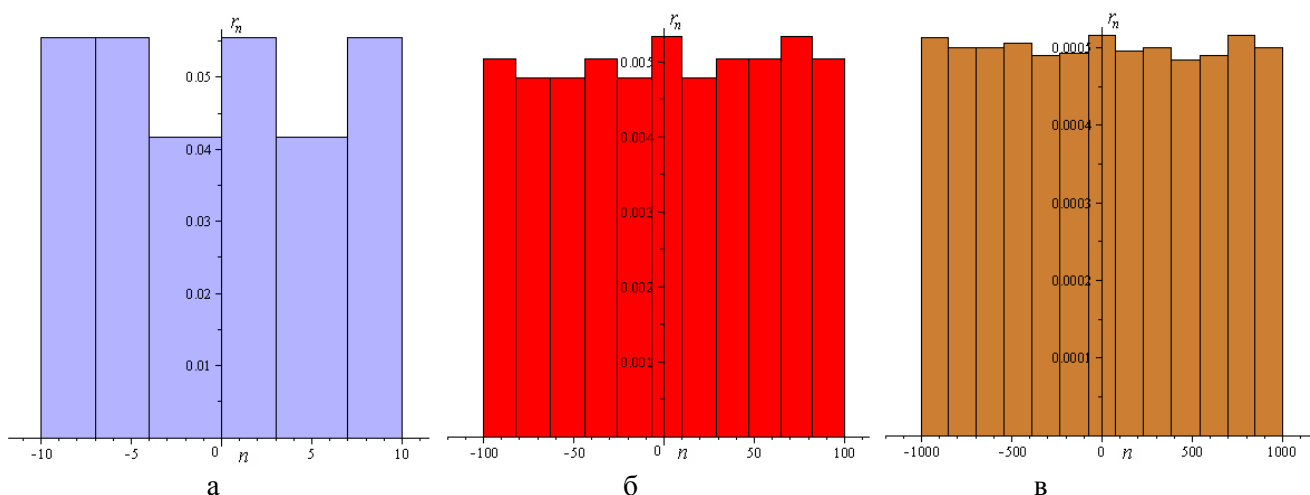


Рис. 1. Гистограммы относительных частот псевдослучайных последовательностей с равномерным распределением при одинаковом объеме выборки,  $N=100000$  и границах распределения  $N_r$ :

а – 10; б – 100; в – 1000.

Очевидно, что с увеличением границы  $N_r$  распределение становится более равномерным. Исходя из максимального значения абсолютной величины относительного значения отклонения момента второго порядка от  $D_{inv}$  [3], можно остановить выбор на  $N_r = 1000$ . Дальнейшее увеличение  $N_r$  не оправдано. График реализации, соответствующий белому шуму с  $N_r = 1000$ , представлен на рис. 2.

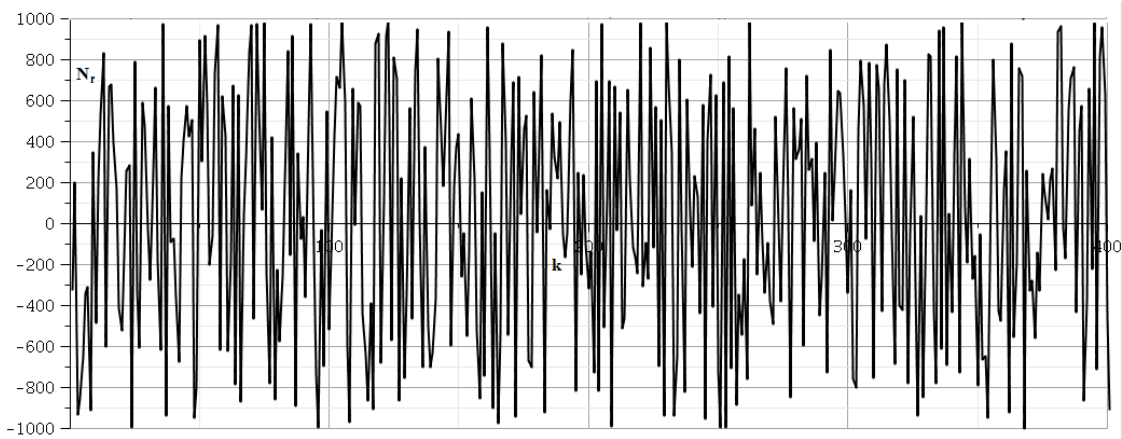


Рис. 2. График реализации белого шума, соответствующий  $N_r = 1000$ .

На рис. 3а приведен график корреляционной функции последовательности, полученной с помощью системы *Maple* при  $T = 1 / 5$  с,  $N_r = 1000$ ,  $N = 50000$  и  $N_k = 100$ , рассчитанной по приведенной ниже формуле (4) [3]:

$$R(kT) = \frac{1}{N - k} \sum_{n=1}^{N-k} r(nT)r((n+k)T), \quad k = 0, 1, 2, \dots, N_k, \quad (4)$$

где  $N_k$  – число сдвигов по времени. Корреляционная функция  $R(kT)$ , как и исходный цифровой сигнал  $r(nT)$ , является суммой произведений вида  $Rk\delta(t - nT)$ .

Для указанного значения периода дискретизации  $T$  частота Найквиста больше верхней границы диапазона случайной составляющей токов дуговой сталеплавильной печи и больше верхней границы диапазона частот соответствующего кажущегося спектра.

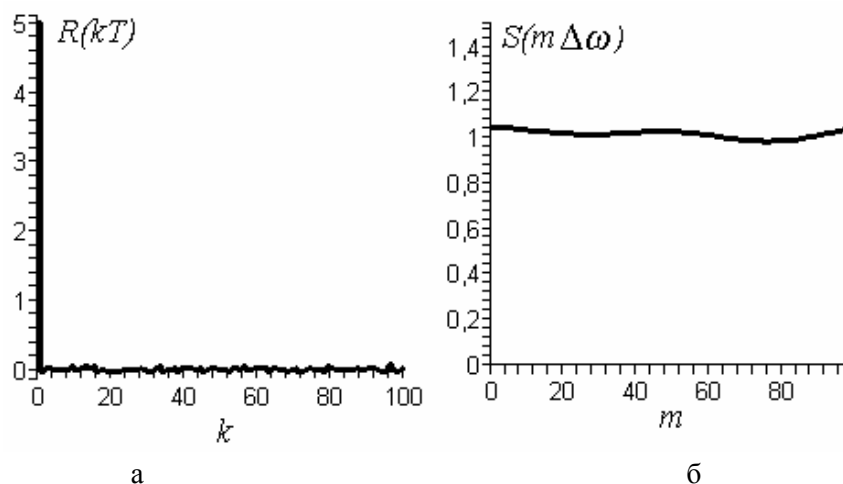


Рис. 3. Графики корреляционной функции (а) и спектральной плотности (б) псевдослучайной последовательности, полученной с применением системы *Maple*.

Начальное значение корреляционной функции  $R_0 = 5,0037$ , оно всего на 0,07% отличается от начального значения корреляционной функции идеального дискретного белого шума, которое равно  $1/T$ . Остальные значения корреляционной функции очень малы, они не превосходят 1% от начального значения. Но их отличие от нуля приводит к пульсациям спектральной плотности, полученной по формулам [3]:

$$R_e(kT) = a_e R(kT),$$

$$S_e(m\Delta\omega) = TR_e(0) + 2 \sum_{k=1}^{N_k} R_e(kT) \cos(\Delta\omega kmT), m = 0 \dots Nm, \quad (5)$$

Частота этих пульсаций и их размах тем выше, чем больше членов корреляционной функции использовано для расчета. Применяя стандартный прием усечения корреляционной функции [6], можно уменьшить проявление этих пульсаций [3].

На рис. 3б показан график спектральной плотности, полученной при  $N_m = 100$  и  $\Delta\omega = 0,06 \text{ с}^{-1}$  на основании корреляционной функции, график которой приведен на рис. 1, а при усечении  $N_k$  до 10. Видно, что среднее значение спектральной плотности близко к единице, как у идеального дискретного белого шума с  $R_0 = 1/T$  [3].

Таким образом, предложенные рекомендации позволяют получить сигнал, близкий к идеальному дискретному белому шуму со спектральной плотностью, равной единице [3].

1. Сергиенко, А.Б. Цифровая обработка сигналов. – СПб.: Питер, 2003. – 604 с.: ил.
2. Теория автоматического управления: В 2-х ч. – Ч. II. Теория нелинейных и специальных систем автоматического управления / под ред. А.А. Воронова. – М.: Высшая школа, 1986. – 504 с.: ил.
3. Кувшинов, Г.Е., Наумов, Л.А., Чупина, К.В. Системы управления глубиной погружения буксируемых объектов: монография. – Владивосток: Дальнаука, 2005. – 285 с.
4. Дьяконов, В.П. Maple 9,5/10 в математике, физике и образовании. – М.: СОЛОН-Пресс, 2006. – 720 с.
5. Гмурман, В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Высшая школа, 2003. – 480 с.
6. Ортюзи, Ж. Теория электронных цепей. – Т. II. Синтез. – М.: Мир, 1971. – 548 с.