УДК 510.2

Халеев Сергей Сергеевич
Амурский государственный университет
г. Благовещенск, Россия
E-mail: skhaleev94@gmail.com
Труфанова Татьяна Вениаминовна
Амурский государственный университет
г. Благовещенск, Россия
E-mail: tvtr@mail.ru
Khaleev Sergei Sergeevich
Amur State University
Blagoveschensk, Russia
E-mail: skhaleev94@gmail.com
Trufanova Tatiana Veniaminovna
Amur State University
Blagoveschensk, Russia
E-mail: tvtr@mail.ru

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

MATHEMATICAL MODELING OF THERMAL CONDUCTIVITY PROCESSES

***Аннотация.** Работа посвящена математическому моделированию нестационарного теплового процесса в однородном стержне. При помощи численного метода представлено решение уравнения в частных производных параболического типа. В среде MATLAB реализован метод конечных разностей, а также проведен вычислительный эксперимент при варьировании входных параметров.*

***Abstract.** This work is devoted to mathematical modeling of a non-stationary thermal process in a homogeneous rod. With the help of a numerical method, the solution of a partial differential equation of parabolic type is presented. In the MATLAB environment, the finite difference method was implemented and a computational experiment was carried out with varying input parameters.*

***Ключевые слова:** нестационарное уравнение теплопроводности, метод разделения переменных, метод конечных разностей, MATLAB, вычислительный эксперимент.*

***Key words:** non-stationary heat equation, separation of variables method, finite difference method, MATLAB, computational experiment.*

DOI: 10.22250/20730268_2023_101_46

Введение

На сегодняшний день большим спросом пользуется компьютерное моделирование, с помощью которого можно отображать имитационные модели. Ученые и инженеры, имея мощные вычислительные машины, а также комплекс программ, могут реализовать сложные вычислительные процессы и смоделировать нужную динамическую систему. Это значительно облегчает работу и минимизирует затраты в ходе различных экспериментов.

Большинство задач математической физики находит широкое применение в таких науках как квантовая механика, термодинамика, электродинамика, гидродинамика, теория тепло- и массопереноса и др., при математическом моделировании физических процессов [1].

Среди уравнений математической физики выделяют уравнения параболического типа. Они составляют большую часть математических моделей, используемых в решении различных прикладных задач. Большинство их применимо для решения вопросов по процессам, связанным с теплопроводностью. Список областей, в которых можно встретить данные физические задачи, достаточно обширен: например, они применяются в ракетостроении, строительной науке и др.

Из-за масштабности сфер, где можно встретить уравнения параболического типа, возникает впечатление, что к каждой задаче нужен определенный подход. Однако большинство тепловых процессов описывается одними и теми же математическими моделями.

Постановка задачи математического моделирования

Рассмотрим концептуальную постановку задачи нестационарного уравнения теплопроводности. Дан тонкий однородный стержень с теплоизолированной боковой поверхностью длиной l, начальная температура которого равна $u(x, 0) = Ax/l$ для $0 < x < l$. На конце стержня $x = 0$, температура поддерживается равной нулю, а температура конца стержня $x = l$ изменяется по закону $u(l, t) = Ae^{-t}$, A = const.

Требуется найти нестационарное распределение температуры в стержне, которое удовлетворяет начальным и граничным условиям:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ 0 < x < l,\ 0 < t < T;$$

$$u(x,0) = \frac{Ax}{l},\ 0 < x < l;$$

$$u(0,t) = 0;$$

$$u(l,t) = Ae^{-t},$$

где t – время; a^2 – нормированный коэффициент температуропроводности; $u(x, t)$ – функция, характеризующая изменение температуры в однородном стержне;

$u(x,0) = \frac{Ax}{l}$ – начальная температура стержня, где l – длина стержня;

$u(0,t) = 0$ – температура на конце стержня, где $x = 0$;

$u(l,t) = Ae^{-t}$, A = const – температура на конце стержня, где $x = l$.

Реализация модели на базе MATLAB

Рассмотрим численную реализацию начально-краевой задачи методом конечных разностей в MATLAB R2017b.

Определим входные параметры модели:

l – длина стержня;

T – общее время процесса;

A – постоянная;

a^2 – нормированный коэффициент температуропроводности;

h – шаг по координате;

tau – шаг по времени;

N – число разбиений по координате;

M – число разбиений по времени.

Определим выходные параметры модели:

x – вектор-строка координатной сетки по оси x размерности $1 \times N + 1$;

t – вектор-строка сетки по оси времени размерности $1 \times M + 1$;

U – матрица значений результирующей функции в узлах координатной сетки для каждого момента времени размерности $N + 1 \times M + 1$.

Разобьем расчетную область на прямоугольную равномерную по осям x и t сетку с узлами $(x_i, t_j) : \omega_{h\tau} = \left\{ \left(x_i = ih, t_j = j\tau \right), i = 0,1,\ldots,N; j = 0,1,\ldots,M \right\}$ с шагами $h = \frac{l}{N}$ по координате и $\tau = \frac{T}{M}$ по времени ($0 \le x \le l,\ 0 \le t \le T$) [2].

Зададим начальные и граничные условия:

начальное условие $u(x,0) = \frac{Ax}{l}$, $u_i^0 = ih$; $0 \le i \le N$;

граничное условие $u(0,t) = 0$, $u_1^j = 0$, $1 \le j \le M + 1$;

граничное условие $u(l,t) = Ae^{-t}$.

Введем значение λ для дальнейшего написания решения: $\lambda = \frac{a * \tau}{h^2}$.

На базе MATLAB напишем программный код, позволяющий получить математическую модель нестационарного процесса теплопроводности в однородном стержне с учетом варьирования входных параметров системы.

Воспользуемся операцией сложения трех матриц для получения конечного графического результата. Фрагмент программного кода:

```
matr = diag((1 + 2 * lambda) * ones(1, N));
matr = matr + diag(-lambda * ones(1, N - 1), 1);
matr = matr + diag(-lambda * ones(1, N - 1), -1).
```

По окончании работы проведем ряд вычислительных экспериментов при варьировании параметров модели относительно нормированного коэффициента температуропроводности, принимающего значения, указанные ниже в экспериментах. Целью исследований является рассмотрение изменения температуры в однородном стержне в момет времени t с заданной координатой x.

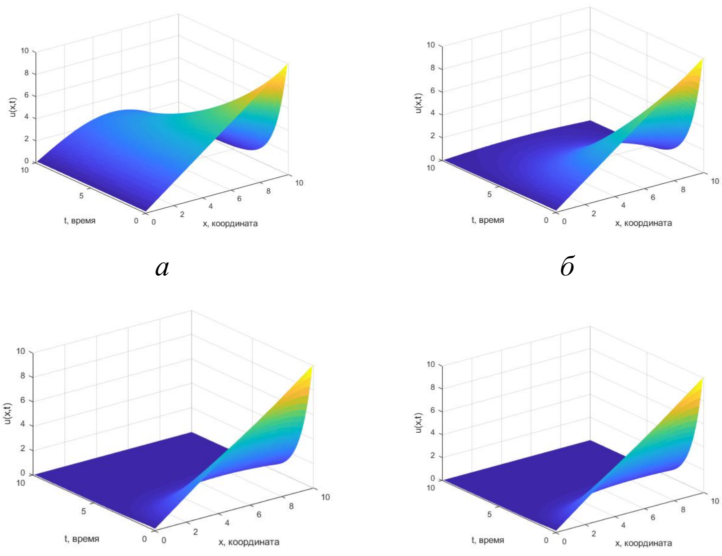

Рис. 1. Графики вычислительных экспериментов численного решения задачи.

На рис. 1 входные данные имеют следующий вид: l = 10 м, T = 10 с, А = 10 К, a^2 = 1 м^2/с – *а*; l = 10 м, T = 10 с, А = 10 К, a^2 = 4 м^2/с – *б*; l = 10 м, T = 10 с, А = 10 К, a^2 = 16 м^2/с – *в*; l = 10 м, T = 10 с, А = 10 К, a^2 = 25 м^2/с – *г*.

При значениях l = 10 м, T = 10 с, A =10 К., a^2 = 1 м^2/с, график аналитического решения будет выглядеть как показано на рис. 2.

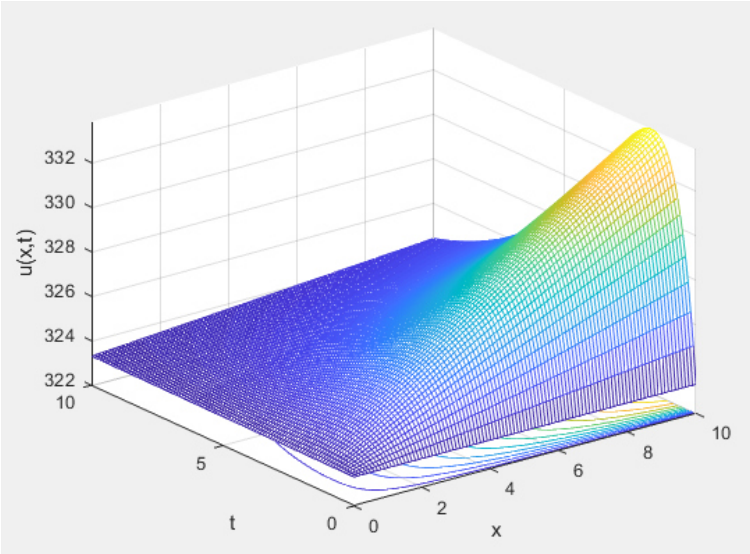

Рис. 2. График аналитического решения.

Аналитическое решение начально-краевой задачи (методом разделения переменных [3]), имеет вид:

$$u(x,t)=\frac{2Al^2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\left[e^{-\left(\frac{a\pi}{l}\right)^2 a^2 t}-e^{-t}\right]}{n(\pi^2 n^2 a^2-l^2)}\sin\frac{\pi n}{l}x+\frac{x}{l}Ae^{-t}.$$

При исследовании полученных графиков можно сделать вывод, что данная модель удовлетворяет граничным условиям $u(0,t)=0$ и $u(l,t)=Ae^{-t}$. Исходя из модели теплопроводности, следует, что на конце стержня, где x = 0, температура равна нулю. На другом конце стержня, где x = l, температура убывает по экспоненте.

Из проделанных вычислительных экспериментов при варьировании параметра a^2 следует, что данная модель адекватно описывает распределение тепла в однородном стержне.

Заключение

В статье в качестве прикладной задачи рассмотрена реализация модели нестационарного процесса теплопроводности в среде MATLAB, описывающая распределение тепла в однородном стержне. В ПО был разработан программный код, реализующий метод конечных разностей для создания модели вычислительного эксперимента, с возможностью варьирования входных параметров.

1. Мартинсон, Л.К., Малов, Ю.И. Дифференциальные уравнения математической физики. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002 – 368 с.

2. Масловская, А.Г. Численные методы: использование инструментальных средств и реализация алгоритмов на базе ППП Matlab. Учебное пособие / А.Г. Масловская, А.В. Павельчук. – Благовещенск: Амурский гос. ун-т, 2020. – 214 с.

3. Труфанова, Т.В., Масловская, А.Г., Веселова, Е.М. Методы решения уравнений математической физики. Учебное пособие – Благовещенск: Амурский гос. ун-т, 2015. – 196 с.