Математика. Прикладная математика

УДК 514.13

Юрьева Татьяна Александровна
Амурский государственный университет
г. Благовещенск, Россия
E-mail: Yuryevat@mail.ru
Yuryeva Tatyana Aleksandrovna
Amur State University
Blagoveschensk, Russia
E-mail: Yuryevat@mail.ru

ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЙ ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКОГО СЕМЕЙСТВА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА МОНЖА – АМПЕРА

UNIQUENESS OF SOLUTIONS TO A ONE-PARAMETER FAMILY OF MONGE – AMPERE TYPE DIFFERENTIAL EQUATIONS

Аннотация. В статье решается задача, связанная с доказательством единственности замкнутых выпуклых поверхностей, уравнения которых являются решениями однопараметрического семейства дифференциальных уравнений типа Монжа – Ампера.

Abstract. The article solves a problem related to the proof of the uniqueness of closed convex surfaces whose equations are solutions of a one-parameter family of differential equations of the Monge – Ampere type.

Ключевые слова: уравнения типа Монжа – Ампера, однопараметрическое семейство уравнений, пространство Лобачевского.

Key words: equations of Monge – Ampere type, one-parameter family of equations, method of continuation by parameter, Lobachevsky space.

DOI: 10.22250/20730268_2022_97_3

Пусть O – некоторая точка в трехмерном пространстве постоянной кривизны H^3 (пространстве Лобачевского), а S_1^2 – сфера единичного радиуса с центром в этой точке.

Пусть далее $S_{\rho_1}^2$ и $S_{\rho_2}^2$ ($\rho_1 < \rho_2$) – две концентрические с S_1^2 сферы, радиусы которых соответственно ρ_1 и ρ_2, а число $\rho_0 \in (\rho_1, \rho_2)$.

Рассмотрим семейство $\Phi_\tau = 0$ уравнений вида Монжа – Ампера, где параметр τ принадлежит сегменту $[0,1]$. Данное семейство уравнений было введено в работе [1], а именно $\Phi_\tau = 0$:

$$\rho_{11}\rho_{22} - \rho_{12}^2 - \rho_{11}(2cth\rho \cdot \rho_v^2 + sh\rho \cdot ch\rho) + 2\rho_{12}\rho_u\rho_v cth\rho - \rho_{22}(2cth\rho \cdot \rho_u^2 + sh\rho \cdot ch\rho \cos^2 v) -$$
$$-(\rho_v^2 \cos^2 v + \frac{\rho_u^2}{\cos v})^2 + 2\rho_u^2 + 2\rho_v^2 \cos^2 v + sh^2\rho \cos^2 v = \left[\tau K_i(u,v,\rho) + (1-\tau)\left(\frac{\rho_0 ch^4\rho_0}{\rho sh^2\rho ch^2\rho} - 1\right)\right] \cdot$$
$$\cdot \frac{(\rho_u^2 + \rho_v^2 \cos^2 v + sh^2\rho \cdot \cos^2 v)^2}{\cos^2 v}.$$

При $\tau = 1$ мы имеем уравнение:

$$\rho_{11}\rho_{22} - \rho_{12}^2 - \rho_{11}(2cth\rho \cdot \rho_v^2 + sh\rho \cdot ch\rho) + 2\rho_{12}\rho_u\rho_v cth\rho - \rho_{22}(2cth\rho \cdot \rho_u^2 + sh\rho \cdot ch\rho \cos^2 v) -$$

$$-(\rho_v^2 \cos^2 v + \frac{\rho_u^2}{\cos v})^2 + 2\rho_u^2 + 2\rho_v^2 \cos^2 v + sh^2\rho \cos^2 v =$$

$$= K_i(u,v,\rho)\frac{(\rho_u^2 + \rho_v^2 \cos^2 v + sh^2\rho \cdot \cos^2 v)^2}{\cos^2 v}.$$

К этому уравнению приводит геометрическая задача восстановления поверхности $F : \rho = \rho(u,v)$ с заданной внутренней (гауссовой) кривизной, причем значение функции $K_{\text{int}}(u,v,\rho)$ в каждой точке пространства H^3 совпадает со значением гауссовой кривизны F в той же точке [1].

Напомним, что ρ_{ij} ($i, j \in \{1,2\}$) есть вторые ковариантные производные функции $\rho = \rho(u,v)$ относительно метрики единичной сферы S_1^2; u, v – локальные географические координаты на S_1^2. Конечный атлас на двумерном многообразии S_1^2 выбран так, что в каждой карте этого атласа $\cos v \geq \alpha > 0$.

В работе [2] изложены достаточные условия единственности решения $\rho = \rho(u,v)$ последнего приведенного уравнения. Имеет место следующее утверждение.

Пусть в $H^3 \setminus \{O\}$ задана функция $K_i(u,v,\rho) \in C^1(S_1^2 \times R^+)$, удовлетворяющая условиям: 1) $K_i(u,v,\rho) = K_i > -1$; 2) $\left[(K_i + 1)sh^2\rho ch^2\rho\right]'_\rho \leq 0$. Тогда существует не более одной поверхности $F : \rho = \rho(u,v)$, в каждой точке которой гауссова кривизна совпадала бы со значением функции K_i в этой точке.

Покажем теперь, что если функция $K_i(u,v,\rho)$ удовлетворяет условиям, сформулированным в приведенном выше утверждении, то аналогичным условиям удовлетворяет и функция $(K_i)_\tau(u,v,\rho) = \tau K_i(u,v,\rho) + (1-\tau)\left(\frac{\rho_0 ch^4\rho_0}{\rho sh^2\rho ch^2\rho} - 1\right)$, где $\tau \in [0,1]$, а $\rho_0 \in (\rho_1, \rho_2)$.

Имеет место следующий результат.

Если функция $K_i(u,v,\rho)$ удовлетворяет условиям, приведенным в предыдущем утверждении, то существует не более одной замкнутой выпуклой поверхности F_τ, имеющей данную гауссову кривизну $(K_i)_\tau$ при любом значении параметра $\tau \in [0,1]$. F_τ – поверхности $\rho_\tau = \rho_\tau(u,v)$, где $\rho_\tau(u,v)$ – решения семейства $\Phi_\tau = 0$.

Для доказательства справедливости сформулированного утверждения достаточно проверить, что выполняется неравенство: $\left[(K_i + 1)sh^2\rho ch^2\rho\right]'_\rho \leq 0$.

В нашем случае данное неравенство выглядит следующим образом:

$$\left[\left(\tau K_i + (1-\tau)\left(\frac{\rho_0 ch^4\rho_0}{\rho sh^2\rho ch^2\rho} - 1\right) + 1\right)sh^2\rho ch^2\rho\right]'_\rho \leq 0.$$

Левую часть этого неравенства можно преобразовать к виду:

$$\tau\left[K_i sh^2\rho ch^2\rho\right]'_\rho + (1-\tau)\left[\left(\frac{\rho_0 ch^4\rho_0}{\rho sh^2\rho ch^2\rho} - 1\right)sh^2\rho ch^2\rho\right]'_\rho + \left[sh^2\rho ch^2\rho\right]'_\rho.$$

В силу того, что функция $K_i(u,v,\rho)=K_i$ удовлетворяет условиям, обеспечивающим единственность замкнутой выпуклой поверхности $F=F_1(\tau=1)$, $\left[(K_i+1)sh^2\rho ch^2\rho\right]'_\rho \le 0$. Отсюда следует неравенство: $\left[K_i sh^2\rho ch^2\rho\right]'_\rho \le -\left[sh^2\rho ch^2\rho\right]'_\rho$. Далее имеем, что выражение $\left[\left(\frac{\rho_0 ch^4\rho_0}{\rho sh^2\rho ch^2\rho}-1\right)sh^2\rho ch^2\rho\right]'_\rho$ также не превышает $-\left[sh^2\rho ch^2\rho\right]'_\rho$.

В самом деле, $\left[\left(\frac{\rho_0 ch^4\rho_0}{\rho sh^2\rho ch^2\rho}-1\right)sh^2\rho ch^2\rho\right]'_\rho = -\frac{\rho_0 ch^4\rho_0}{\rho^2}-\left[sh^2\rho ch^2\rho\right]'_\rho < -\left[sh^2\rho ch^2\rho\right]'_\rho$, так как $-\frac{\rho_0 ch^4\rho_0}{\rho^2}<0$.

Следовательно, выпуклая комбинация левых частей данных неравенств обладает тем же свойством: $\tau\left[K_i sh^2\rho ch^2\rho\right]'_\rho + (1-\tau)\left[\left(\frac{\rho_0 ch^4\rho_0}{\rho sh^2\rho ch^2\rho}-1\right)sh^2\rho ch^2\rho\right]'_\rho \le -\left[sh^2\rho ch^2\rho\right]'_\rho$. Отсюда в силу того, что $\left[sh^2\rho ch^2\rho\right]'_\rho > 0$, и получаем, что $\left[\left(\tau K_i + (1-\tau)\left(\frac{\rho_0 ch^4\rho_0}{\rho sh^2\rho ch^2\rho}-1\right)+1\right)sh^2\rho ch^2\rho\right]'_\rho \le 0$.

Условие $\left[((K_i)_\tau+1)sh^2\rho ch^2\rho\right]'_\rho \le 0$ обеспечивает единственность всякой замкнутой выпуклой поверхности $F_\tau : \rho_\tau = \rho_\tau(u,v)$ однопараметрического семейства отрицательно эллиптических уравнений $\Phi_\tau = 0$, $\tau\in[0,1]$.

Таким образом, так как функция $(K_i)_\tau(u,v,\rho)$ удовлетворяет всем условиям единственности поверхности F_τ при любом $\tau\in[0,1]$, то существует не более одной выпуклой гомеоморфной сфере S_1^2 поверхности F_τ, звездной относительно точки O пространства H^3, имеющей заданную гауссову кривизну $(K_i)_\tau(u,v,\rho)$ при любом значении параметра τ из отрезка $[0,1]$.

Утверждение, сформулированное в статье, доказано.

---

1. Филимонова, А.П., Юрьева, Т.А. Равномерные по параметру оценки решений семейства дифференциальных уравнений типа Монжа – Ампера в метрике C0(S12) // Вестник Амурского государственного университета. Серия «Естественные и экономические науки».– 2020. – № 89. – С. 3-6.

2. Филимонова, А.П., Юрьева, Т.А. Единственность решения уравнения Монжа – Ампера некоторого класса на сфере как двумерном многообразии // Международный научно-исследовательский журнал. – 2016.– № 6-5 (48). — С. 107-110.