

Павельчук Анна Владимировна

Амурский государственный университет,

г. Благовещенск, Россия

E-mail: ap.9.04@mail.ru

Pavelchuk Anna Vladimirovna

Amur State University,

Blagoveshchensk, Russia

E-mail: ap.9.04@mail.ru

Масловская Анна Геннадьевна

Амурский государственный университет,

г. Благовещенск, Россия

E-mail: maslovskayaag@mail.ru

Maslovskaya Anna Gennadievna

Amur State University,

Blagoveshchensk, Russia

E-mail: maslovskayaag@mail.ru

МОДИФИЦИРОВАННАЯ КОНЕЧНО-РАЗНОСТНАЯ СХЕМА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ОДНОГО КЛАССА ЗАДАЧ «КОНВЕКЦИИ – РЕАКЦИИ – ДИФФУЗИИ»

MODIFIED FINITE-DIFFERENCE SCHEME FOR SOLVING ONE CLASS OF CONVECTION-REACTION-DIFFUSION PROBLEMS

Аннотация. В работе проведен обзор подходов к построению конечно-разностных методов решения нестационарных диффузионных уравнений и уравнений переноса. Представлена модифицированная вычислительная схема для решения полулинейного многомерного уравнения типа «реакция – диффузия – конвекция». Гибридная вычислительная схема сконструирована на основе метода переменных направлений и схемы Роберта – Вейсса.

Abstract. The paper reviews approaches to the construction of finite-difference methods for solving time-dependent diffusion equations and transport equations. A modified computational scheme for solving a semilinear multidimensional equation of the «reaction – diffusion – convection» type is presented. The hybrid computational scheme is based on the alternating directions method and the Robert-Weiss scheme.

Ключевые слова: уравнение «конвекции – реакции – диффузии», явная схема, неявная схема, метод расщепления, метод переменных направлений, аппроксимация, устойчивость, монотонность.

Key words: «convection – reaction – diffusion» equation, explicit scheme, implicit scheme, alternating directions method, approximation, stability, monotony.

DOI: 10.22250/jasu.93.2

Введение

В современной практике математического моделирования в числе важнейших объектов исследования занимают системы, в которых протекают процессы диффузионной природы. Дифференциальные уравнения с частными производными вида «конвекция – реакция – диффузия» («адвекция –

реакция – диффузия») применяют для описания явлений и процессов в различных отраслях научного знания: экономике (модель функционирования опционов), в химии (формализация химических реакций и сложных диффузионных явлений), в биологии и медицине, в геологии, в задачах экологического прогнозирования и мониторинга окружающей среды, в теории теплопроводности и переноса.

Математические постановки задач моделирования конвективно-реакционно-диффузионных процессов приводят к начально-граничным задачам для уравнений с частными производными параболического типа (нестационарные режимы) и к граничным задачам для уравнений эллиптического типа (стационарные режимы). Как правило, построение аналитических решений данного класса задач вызывает серьезные затруднения, поэтому для реализации математических моделей указанного вида широко применяют численные методы, в том числе конечно-разностные. Настоящая работа направлена на конструирование конечно-разностной схемы, предназначенной для математического моделирования динамических систем, в которых протекают процессы реакции-диффузии.

Подходы к построению конечно-разностных методов решения нестационарных диффузионных уравнений и уравнений переноса

Метод конечных разностей – один из эффективных методов решения дифференциальных задач, основными достоинствами которого являются относительная несложность программируемых процедур, удовлетворительная точность для областей с простой геометрией и возможность применения для решения широкого класса задач. Основы метода конечных разностей достаточно полно изложены в известных обзорах [1-4]. Идея метода конечных разностей заключается в дискретизации – замене континуальной задачи на дискретную, т.е. переход от непрерывной области изменения аргумента к области дискретного его изменения, при этом производные в дифференциальной задаче заменяются их конечно-разностными аналогами. Уменьшение объема вычислений достигается за счет правильного выбора сетки (построение эффективных сеток) и переменных в многомерных задачах [5].

Составляя разностные схемы, следует уделять внимание выбору между явными и неявными схемами. Явные схемы позволяют разрешить разностные уравнения без особых трудностей, при этом схемы будут условно устойчивы, неэкономичны, а также иметь возможность ограничений на шаг по времени, приводящих к увеличению числа шагов. Неявные схемы отличаются тем, что, как правило, жесткие ограничения на шаг по времени в них отсутствуют. В таком случае более важен выбор метода решения алгебраических уравнений, к которым сводится дифференциальная задача.

Для многомерных уравнений конструирование явных схем несложно – используются введенные для одномерных задач принципы. В таком случае важным является вопрос экономичности полученных вычислительных схем, так как увеличение числа независимых пространственных координат в рассматриваемой задаче приводит к необходимости введения более строгих ограничений для удовлетворения требования устойчивости.

Построение неявных схем также имеет свои сложности. Так, конструирование прямых аналогов вычислительных алгоритмов, используемых для одномерных случаев, приводит к существенному усложнению схем и/или потере экономичности. В связи с чем особое внимание в исследовании было уделено построению вычислительных схем, предназначенных для решения многомерных задач, оптимально сочетающих эффективность, экономичность и относительную несложность при алгоритмизации. В подобных исследованиях с помощью методов факторизации и расщепления многомерные задачи сводились к последовательности одномерных аналогов или более простых задач. Развитию экономичных вычислительных схем расщепления для решения многомерных эволюционных задач математической физики посвящены фундаментальные работы Марчука [2], Яненко [6], Писмена и Рэчфорда [7], Самарского [3], Годунова [1], Дугласа [8], Вабищевича [9] и др.

Метод факторизации основан на представлении вычислительных схем в форме произведения схем, конструируемых для одномерных случаев. Этот метод развивался параллельно с методом расщепления начиная с 50-х гг. XX в. В работах [2, 3, 6, 10] предложены эффективные методы решения многомерных задач: схемы с расщепляющими операторами и локально-одномерные схемы [3], метод продольно-поперечной прогонки, метод стабилизирующей прогонки [6] и др. В работах [2, 10] представлена общая формулировка метода факторизации.

Метод расщепления предполагает преобразование решаемой дифференциальной задачи к совокупности простых одномерных задач и построение соответствующей комбинации явных и неявных конечно-разностных схем. Недостатки указанного подхода – возможная потеря точности вычислений и снижение скорости сходимости процесса. В числе экономичных схем расщепления особое распространение получили: метод дробных шагов Яненко, метод предиктор-корректор, центрально-симметричный метод Самарского, метод переменных направлений Писмена – Рэчфорда, метод переменных направлений Формалева.

Метод расщепления по направлениям для параболических и гиперболических уравнений подробно рассмотрен в исследованиях [10]. Для каждого одномерного оператора представляется расщепление на более простые, строятся экономичные схемы для расщепленных уравнений. Такой подход еще называют расщеплением по пространственным направлениям. Метод предиктор-корректор используется в целях повышения порядка аппроксимации, восстановления консервативности схемы и др. Чаще всего этот метод применяют при решении нелинейных уравнений для избавления от итераций по нелинейности и сохранения порядка аппроксимации, консервативности и устойчивости схемы [1, 2, 6, 10].

При решении линейных и нелинейных многомерных уравнений предложенные подходы построения разностных схем позволяют свести поставленную задачу к последовательности более простых одномерных задач. В свою очередь расщепление должно выбираться таким образом, чтобы устойчивость итоговой разностной схемы выполнялась. Также необходимо учитывать, что расщепление может привести к рассогласованию стабилизирующего оператора правой части. В связи с изложенным при конструировании схем расщепления эти вопросы требуют дополнительного исследования.

Огромную роль в задачах играет постановка краевых условий. При реализации краевых условий в схемах расщепления и факторизации ситуация усложняется из-за необходимости задания граничных условий для вспомогательных величин и невязок, которых не было в физической постановке задачи. Общего подхода задания краевых условий на дробных шагах для этого класса схем не существует. Имеются отдельные постановки краевых условий для конкретных краевых задач [3, 6, 10].

Конструирование конечно-разностных схем решения задачи конвекции – реакции – диффузии вида:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla u + cu^k - \nabla \cdot (D\nabla u) = f,$$

где $c = c(x, y, z, t)$ – некоторая заданная функция (реакционный коэффициент), требует синтеза и согласования схем, построенных для диффузионного уравнения и для уравнения переноса.

Схема метода переменных направлений для решения диффузионного уравнения

Рассмотрим некоторые аспекты конечно-разностного решения данных задач. Для решения диффузионного уравнения приведем основные концепции метода переменных направлений (или поперечно-продольной прогонки) Писмена – Рэчфорда [7]. Рассмотрим двумерное по координатам уравнение с частными производными параболического типа для следующей пространственно-временной области $\bar{G}_T = \bar{G} \times [0, T]$, $t \in [0, T]$, $\bar{G} = G + \Gamma$, $G = L_1 \times L_2$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\Delta u(x, y), \quad x \in (0, L_1), \quad y \in (0, L_2), \quad t > 0. \quad (1)$$

Постановку задачи дополним заданием начального условия:

$$u(x, y, 0) = \psi(x, y), \quad x \in [0, L_1], \quad y \in [0, L_2], \quad t = 0 \quad (2)$$

и граничными условиями:

$$\begin{aligned} u(x, 0, t) &= \phi_1(x, t), \quad x \in [0, L_1], \quad y = 0, \quad t > 0, \\ u(x, L_2, t) &= \phi_2(x, t), \quad x \in [0, L_1], \quad y = L_2, \quad t > 0, \\ u(0, y, t) &= \phi_3(y, t), \quad y \in [0, L_2], \quad x = 0, \quad t > 0, \\ u(L_1, y, t) &= \phi_3(y, t), \quad y \in [0, L_2], \quad x = L_1, \quad t > 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Для начально-граничной задачи (1-3) введем пространственно-временную сетку с шагами h_1 , h_2 , τ по координатам x , y и времени t соответственно:

$$\omega_{h_1, h_2}^{\tau} = \{x_i = ih_1, i = 0, N; y_j = jh_2, j = 0, M; t^k = k\tau, k = 0, 1, 2, \dots\}.$$

Метод переменных направлений предполагает разбиение шага по времени на несколько дробных шагов в соответствие с числом независимых пространственных координат. На первом дробном шаге по времени вводится неявная аппроксимация для первого дифференциального оператора по пространственной переменной – выполняются прогонки по первому направлению. Остальные дифференциальные операторы аппроксимируются явным образом. На следующем шаге по времени следующий пространственный дифференциальный оператор аппроксимируется неявно, а все остальные – явно, и т.д. Для первого дробного шага вычислительная схема метода переменных направлений (для задачи (1) – (3)) запишется в форме:

$$\frac{u_{ij}^{k+1/2} - u_{ij}^k}{\tau/2} = \frac{D}{h_1^2} (u_{i+1j}^{k+1/2} - 2u_{ij}^{k+1/2} + u_{i-1j}^{k+1/2}) + \frac{D}{h_2^2} (u_{ij+1}^k - 2u_{ij}^k + u_{ij-1}^k). \quad (4)$$

Соответственно для второго дробного шага по времени:

$$\frac{u_{ij}^{k+1} - u_{ij}^{k+1/2}}{\tau/2} = \frac{D}{h_1^2} (u_{i+1j}^{k+1/2} - 2u_{ij}^{k+1/2} + u_{i-1j}^{k+1/2}) + \frac{D}{h_2^2} (u_{ij+1}^{k+1} - 2u_{ij}^{k+1} + u_{ij-1}^{k+1}). \quad (5)$$

Численное решение систем (4) и (5) может быть найдено на основе прямого метода прогонки. Предварительно системы дополняются соответствующими уравнениями, которые получают из конечно-разностных аппроксимаций краевых условий (3).

Конечно-разностные схемы для решения уравнения переноса

Введем в рассмотрение линейное уравнение переноса следующего общего вида:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -v \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (6)$$

где v – скорость переноса (положительная величина), дополненная граничными и начальными условиями в прямоугольной области.

Один из наиболее распространенных подходов для конечно-разностного решения задачи (6) – использование абсолютно устойчивой неявной схемы «уголок назад»:

$$\frac{u_i^{k+1} - u_i^k}{\tau} = -v \frac{u_{i+1}^{k+1} - u_i^{k+1}}{h}. \quad (7)$$

Схему (7) называют еще «противопотоковой» («upstream»), использование конечной разности против потока при этом интерпретируют как введение искусственной вязкости [4, 11]. Недостатком такой схемы является первый порядок аппроксимации по координате и времени. Поэтому введение искусственной вязкости во всей области решения может привести к снижению точности и деформированию исходного профиля.

Использование центральных конечных разностей при построении аппроксимации уравнения (7) приводят к повышению порядка аппроксимации, но накладывают определенные ограничения на устойчивость и монотонность таких задач. Эту схему еще называют неявной схемой Эйлера. Согласно теореме Годунова [1] не существует линейных монотонных схем с порядком аппроксимации выше первого. В связи с чем были предприняты попытки построения модифицированных схем более высокого порядка точности. Так, схема Лакса имеет порядок точности $O(\Delta t, \Delta x^2)$, но условно устойчива при $\tau/h \leq 1$. Схема Лакса – Вендроффа имеет порядок точности $O(\Delta t^2, \Delta x^2)$, но также условно устойчива при $\tau/h \leq 1$. На практике часто используют двухшаговый вариант схемы Лакса – Вендроффа (типа предиктор – корректор) и его распространенную вариацию – метод Мак-Кормака. Кроме того, известна схема второго порядка точности Федоренко, представляющая комбинацию неявной схемы «уголок назад» и схемы Лакса (она также условно устойчива при $\tau/h \leq 1$). Схема Федоренко была одной из первых с искусственными монотонизаторами. Схема Lerafrog и схема второго порядка «парабола» имеют порядок точности $O(\Delta t^2, \Delta x^2)$ и тоже условно устойчивы при $\tau/h \leq 1$ и при $\tau/h \leq 2$ соответственно [11, 12]. Известна также схема Бабенко, имеющая второй порядок аппроксимации по пространству и по времени и обладающая абсолютной устойчивостью [11]. Развитию разностных схем повышенного порядка аппроксимации для уравнения переноса с использованием адаптивной искусственной вязкости посвящена, в частности, работа Попова [11]. В ранней работе Роберта – Вейсса [13] в числе семейства методов различного порядка точности предложена следующая схема для решения уравнения переноса:

$$\frac{u_i^{k+1} - u_i^k}{\tau} = -v \frac{u_i^{k+1} - u_{i-1}^{k+1} + u_{i+1}^k - u_i^k}{2h}. \quad (8)$$

Конечно-разностная схема (8) характеризуется вторым порядком аппроксимации по пространственной переменной и абсолютно устойчивостью. Перечисленные проблемы, возникающие при использовании конечно-разностных аппроксимаций конвективного слагаемого, имеют место и при решении уравнений типа «конвекция-диффузия». Данные обстоятельства приводят к формулировке условий для обеспечения устойчивости схем, формальному усложнению алгоритмов и увеличению временных затрат на вычисления.

Направлениями конструирования вычислительных схем с порядком выше первого являются: введение ограниченной по монотонности схемы с аппроксимацией производной центральными разностями [4] и использование нелинейных схем повышенного порядка точности [12, 14, 15, 16, 17]. Например, в исследовании [16] представлен анализ возможности так называемых кососимметрических вычислительных схем. В работах [14, 15] описаны схемы высокого порядка точности, в которых для аппроксимации конвективного слагаемого предлагается использовать несколько узлов. В работе Вискова [17] для решения одномерного по координате уравнения конвекция-реакция-диффузия (и реализации модели Блэка – Шоулза) в части аппроксимации конвективного слагаемого использована схема (8).

Гибридная конечно-разностная схема для решения уравнения «конвекции – реакции – диффузии»

Рассмотрим задачу построения конечно-разностной схемы для аппроксимации одного класса уравнений «конвекция – реакция – диффузия» в следующей обобщенной постановке (в условиях цилиндрической симметрии задачи):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\Delta u - \left(v_r \frac{\partial u}{\partial r} + v_z \frac{\partial u}{\partial z} \right) - cu^2 + G(r, z), \quad (9)$$

где $0 < r < R$, $0 < z < Z$, $0 < t \leq T$.

Оператор Лапласа задается в следующем виде:

$$\Delta = \begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, & \text{при } r \neq 0 \\ 2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, & \text{при } r = 0 \end{cases}; R, Z - \text{геометрические размеры объекта; } u(r, z, t) - \text{искомая функция; } D -$$

коэффициент диффузии; v_r, v_z – компоненты скорости конвективного переноса; $G(x, y)$ – функция внутреннего источника.

К математическому описанию физического процесса с помощью уравнений такого класса приводит задача о моделировании процесса зарядки полярных диэлектриков в условиях электронного облучения [18-21].

Аппроксимацию уравнения (9) будем строить на основе метода конечных разностей с использованием алгоритма метода переменных направлений. Введем следующую пространственно-временную сетку h_1, h_2 и τ соответственно по переменным r, z, t :

$$\omega_{h_1, h_2}^\tau = \{r_i = ih_1, i = \overline{1, N}, z_j = jh_2, j = \overline{1, M}, t^k = k\tau, k = 1, 2, \dots\}.$$

Суть метода переменных направлений заключается в расщеплении исходного уравнения на

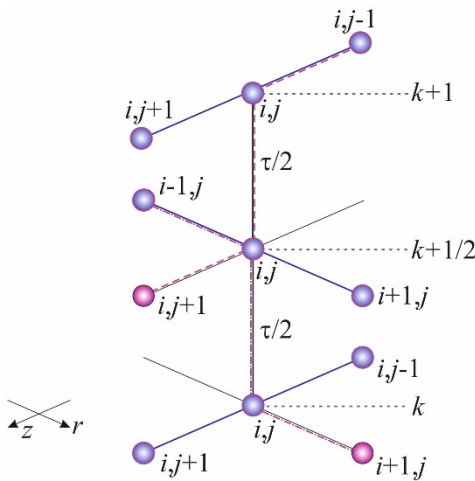


Рис. 1. Конечно-разностный шаблон для модифицированной схемы.

два, зависящих, соответственно, только от одной координаты. Для аппроксимации производной по времени и диффузионной компоненты используем классическую схему Писмена – Рэчфорда, а для аппроксимации дрейфового (конвективного) слагаемого на текущем временном подслое – схему Роберта – Вейсса. Последняя имеет второй порядок аппроксимации по координате. Модифицированная схема имеет шаблон, представленный на рис. 1.

На шаблоне пунктиром и штрих-пунктиром показаны «встроенные» схемы для аппроксимации конвективного слагаемого на текущем временном подслое (на котором диффузионный оператор аппроксимируется неявно). Для второй компоненты дрейфового слагаемого (для временного подслоя, на котором диффузионный оператор аппроксимируется явно) используем классическую аппроксимацию производной

центральными разностями, имеющую второй порядок точности и дающей также абсолютно устойчивую схему.

На сетке ω_{h_1, h_2}^τ будем аппроксимировать уравнение (9) на верхнем временном слое $t^{k+1} = (k+1)\tau$. На подслое $k+1/2$ слое будем иметь:

$$\begin{aligned} \frac{u_{ij}^{k+1/2} - u_{ij}^k}{\tau} &= \frac{1}{2} G_{ij}^{k+1/2} - c \cdot (u_{ij}^k)^2 - \frac{1}{2} \left(v_r \frac{u_{ij}^{k+1/2} - u_{i-1j}^{k+1/2} + u_{i+1j}^k - u_{ij}^k}{2h_1} + v_z \frac{u_{ij+1}^k - u_{ij-1}^k}{2h_2} \right) + \\ &+ \frac{D}{2} \left(\frac{u_{i+1j}^{k+1/2} - 2u_{ij}^{k+1/2} + u_{i-1j}^{k+1/2}}{h_1^2} + \frac{1}{r_i} \frac{u_{i+1j}^{k+1/2} - u_{i-1j}^{k+1/2}}{2h_1} + \frac{u_{ij+1}^k - 2u_{ij}^k + u_{ij-1}^k}{h_2^2} \right). \end{aligned} \tag{10}$$

На подслое $k+1$ слое:

$$\begin{aligned} \frac{u_{ij}^{k+1} - u_{ij}^{k+1/2}}{\tau} &= \frac{1}{2} G_{ij}^{k+1/2} - c \cdot \rho_{ij}^k \cdot \rho_{ij}^{k+1} - \frac{1}{2} \left(v_r \frac{u_{i+1j}^{k+1/2} - u_{i-1j}^{k+1/2}}{2h_1} + v_z \frac{u_{ij}^{k+1} - u_{ij-1}^{k+1} + u_{ij+1}^{k+1/2} - u_{ij}^{k+1/2}}{2h_2} \right) + \\ &+ \frac{D}{2} \left(\frac{\rho_{i+1j}^{k+1/2} - 2u_{ij}^{k+1/2} + u_{i-1j}^{k+1/2}}{h_1^2} + \frac{1}{r_i} \frac{u_{i+1j}^{k+1/2} - u_{i-1j}^{k+1/2}}{2h_1} + \frac{u_{ij+1}^{k+1} - 2u_{ij}^{k+1} + u_{ij-1}^{k+1}}{h_2^2} \right). \end{aligned} \tag{11}$$

Следует заметить, что нелинейное реакционное слагаемое $-c \cdot \rho^2$ входит во вторую подсхему (11) в «замороженном» виде. Здесь при конструировании вычислительной схемы для аппроксимации реакционного слагаемого использован принцип «замороженных коэффициентов» [3]. Соответствующее слагаемое представлено в форме: $c\rho^{k+1} = (c \cdot \rho^k)\rho^{k+1}$, где выражение в скобках будет играть роль некоторой константы, зависящей от переменных r, z, t . Эта константа явно подставляется в схему (11) на втором дробном шаге.

В силу общей концепции метода переменных направлений на каждом дробном шаге достигается частичная аппроксимация, а полная аппроксимация соответствует последнему дробному шагу.

Заключение

Таким образом, для построения конечно-разностной аппроксимации уравнения «конвекция – реакция – диффузия» можно воспользоваться подходом конструирования аддитивной схемы, проводя расщепление многомерного уравнения по пространственным переменным либо по физическим процессам. Переход к цепочке более простых задач позволяет строить экономичные разностные схемы.

Для одного класса полулинейных уравнений типа «конвекция-реакция-диффузия» сконструирована гибридная конечно-разностная схема, которая основана на синтезе двух подходов: методе переменных направлений для аппроксимации «диффузионной части» уравнения, аппроксимация конвективного слагаемого – по схеме Роберта – Вейсса для текущего временного подслоя и с помощью центрально-симметричной аппроксимации – для предыдущего временного подслоя. Подобный подход обеспечивает монотонность конструируемой схемы, ее абсолютную устойчивость и второй порядок аппроксимации по пространственным координатам и времени.

-
1. Годунов, С.К. Численные методы решения многомерных задач газовой динамики / С.К. Годунов, А.В. Забродин, М.Я. Иванов, др. – М.: Наука, 1989. – 614 с.
 2. Марчук, Г.И. Методы расщепления для решения нестационарных задач // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1995. – Т. 35, № 6. – С. 843-849.
 3. Самарский, А.А. Теория разностных схем. – М.: Наука, 1989. – 614 с.
 4. Самарский, А.А. Численные методы решения задач конвекции-диффузии / А.А. Самарский, П.Н. Вабищевич. – М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2015. – 248 с.
 5. Лисейкин, В.Д. Обзор методов построения структурных адаптивных сеток // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1996. – Т. 36, № 1. – С. 3-41.
 6. Яненко, Н.Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. – Новосибирск: Наука, 1967. – 197 с.
 7. Peaceman, D.W. The numerical solution of parabolic and elliptic differential equations / D.W. Peaceman, H.N.Jr. Rachford // J. Soc. Indust. Appl. Math. – 1995. – V. 3. – P. 28-41.
 8. Douglas, Jr.J. Alternating direction iteration for mildly nonlinear elliptic difference equations // II. Num. Math. – 1962. – V. 4. – P. 301-302.
 9. Вабищевич, П.Н. Разностные схемы для нестационарных задач конвекции-диффузии / П.Н. Вабищевич, А.А. Самарский // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1998. – Т. 38, № 2. – С. 207-219.
 10. Ковеня, В.М. Применение метода расщепления в задачах аэродинамики / В.М. Ковеня, Г.А. Тарнавский, С.Г. Черный. – Новосибирск: Наука, Сиб. отд., 1990. – 247 с.
 11. Попов, И.В. Построение разностной схемы повышенного порядка аппроксимации для уравнения переноса с использованием адаптивной искусственной вязкости / И.В. Попов, Ю.Е. Тимофеева // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. – 2015. – № 39. – 25 с.
 12. Шишкина, О.В. Об устойчивости по Нейману симметричных схем высокого порядка для задач конвекции-диффузии // Сибирский математический журнал. – 2007. – Т. 48, № 6. – P. 1422-1428.
 13. Roberts, K.V. Convective Difference Schemes / K.V. Roberts, N.O. Weiss // License or copyright restrictions may apply to redistribution, U.K.A.E.A., Culham Laboratory, Abingdon, Berks England. – 1966. – P. 272-299.
 14. Leonard, B.P. A stable and accurate convective modelling procedure based on quadratic upstream interpolation // Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. – 1979. – V. 19. – P. 59-98.

15. Rosenberg, D.U. An explicit finite difference solution to the convection-dispersion equations // Num. Meth. Partial. Diff. Eqn., 1986. –V. 2. – P. 229-237.
16. Krukier, L.A. Numerical Solution of the Steady Convection-Diffusion Equation with Dominant Convection // International Conference on Computational Science, ICCS. – 2013. – V.18. – P. 2095-2100.
17. Buckova, Z. Alternating direction explicit methods for convection diffusion equations / Z. Buckova, M. Ehrhardt, M. Gunther // Bergische Universitat Wuppertal Fachbereich Mathematik und Naturwissenschaften, IMACM. – 2015. – P. 309-325.
18. Maslovskaya, A.G., Sivunov, A.V. Simulation of electron injection and charging processes in ferroelectrics modified with the SEM-techniques // Solid State Phenomena. – 2014. – V. 213. – P. 119-124.
19. Масловская А.Г. Физико-математическое моделирование индуцированной электронным зондом зарядки сегнетоэлектриков в процессе переключения доменной структуры // Поверхность. Рентгеновские, синхротронные и нейтронные исследования. – 2013. – № 7. – С. 84-88.
20. Pavelchuk, A.V., Maslovskaya, A.G. Numerical simulation of electron beam-induced dielectric charging using advanced computational scheme for solving semilinear reaction-diffusion equation // World Journal of Modelling and Simulation. – 2018. – V. 14, № 2. – P. 83-89.
21. Павельчук, А.В., Масловская, А.Г. Подход к численной реализации диффузионно-дрейфовой модели полевых эффектов, индуцированных движущимся источником // Известия вузов. Физика. – 2020. – Т. 63, № 1 (745). – С. 94-100.

УДК 51-76:519.63

Шуай Исюань

Амурский государственный университет,
г. Благовещенск, Россия
E-mail: 06603568@qq.com

Shuai Yixuan

Amur State University,
Blagoveshchensk, Russia
E-mail: 06603568@qq.com

Хмелёв Алексей Павлович

Амурский государственный университет,
г. Благовещенск, Россия
E-mail: alexysxeightn@gmail.com

Khmelev Alexey Pavlovich

Amur State University,
Blagoveshchensk, Russia
E-mail: alexysxeightn@gmail.com

Масловская Анна Геннадьевна

Амурский государственный университет,
г. Благовещенск, Россия
E-mail: maslovskayaag@mail.ru

Maslovskaya Anna Gennadievna

Amur State University,
Blagoveshchensk, Russia
E-mail: maslovskayaag@mail.ru

**РЕАКЦИОННО-ДИФФУЗИОННАЯ МОДЕЛЬ КОММУНИКАЦИИ БАКТЕРИЙ
С УЧЕТОМ ВАРИАЦИИ ЗАКОНА ПОПУЛЯЦИОННОГО РОСТА**

**THE REACTION-DIFFUSION MODEL OF BACTERIA COMMUNICATION
UNDER VARIATION IN THE LAW OF POPULATION GROWTH**