Математика. Прикладная математика

УДК 514.13 + 519.854.2

Юрьева Татьяна Александровна
Амурский государственный университет,
г. Благовещенск, Россия
E-mail: Yuryevatat@mail.ru
Yuryeva Tatyana Aleksandrovna
Amur State University,
Blagoveshchensk, Russia
E-mail: Yuryevatat@mail.ru

О РАЗРЕШИМОСТИ УРАВНЕНИЯ ВИДА МОНЖА – АМПЕРА НА S_1^2, СВЯЗАННОГО С ЗАДАЧЕЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

ON THE SOLVABILITY OF THE MONGE – AMPERE EQUATION ON S_1^2, RELATED TO THE PROBLEM OF DIFFERENTIAL GEOMETRY

Аннотация. В статье приводится доказательство замкнутости решения семейства дифференциальных однопараметрических уравнений типа Монжа – Ампера. Полученный результат используется в исследовании однозначной разрешимости изучаемого дифференциального уравнения.

Adstract. The paper provides a proof of the closed nature of the solution of a family of Monge – Ampere differential one-parameter equations. The obtained result is used in the study of the unique solvability of the differential equation under study.

Ключевые слова: гиперболическое пространство, уравнение Монжа – Ампера, отрицательная эллиптичность, замкнутость.

Key words: hyperbolic space, Monge – Ampere equation, negative ellipticity, closure.

DOI: 10.22250/jasu.93.1

Одним из разделов дифференциальной геометрии является выяснение вопроса существования и единственности кривой или поверхности с заданной геометрической характеристикой. Простейшая задача такого рода – исследование существования и единственности кривой в трехмерном евклидовом пространстве по заданным кривизне и кручению этой кривой.

Такие задачи приводят к дифференциальным уравнениям на многообразиях в различного вида пространствах.

В работе [1] мы рассмотрели задачу восстановления регулярной замкнутой выпуклой и звездной относительно некоторой фиксированной точки O пространства Лобачевского H^3 (пространства постоянной отрицательной кривизны) по данной внутренней (гауссовой) кривизне, как функции точки пространства H^3.

Аналитическая модель этой задачи реализуется отрицательно эллиптичным уравнением типа Монжа – Ампера на сфере единичного радиуса с центром в точке O пространства H^3. Данная сфера обозначается символом S_1^2 и представляет собой двумерное компактное многообразие.

Указанное уравнение имеет следующий вид:

$$\rho_{11}\rho_{22}-\rho_{12}^2-\rho_{11}(2cth\rho\cdot\rho_v^2+sh\rho\cdot ch\rho)+2\rho_{12}\rho_u\rho_v cth\rho-\rho_{22}(2cth\rho\cdot\rho_u^2+sh\rho\cdot ch\rho\cos^2 v)-$$
$$-(\rho_v^2\cos^2 v+\frac{\rho_u^2}{\cos v})^2+2\rho_u^2+2\rho_v^2\cos^2 v+sh^2\rho\cos^2 v=K_i(u,v,\rho)\frac{(\rho_u^2+\rho_v^2\cos^2 v+sh^2\rho\cdot\cos^2 v)^2}{\cos^2 v}.$$

Здесь $K_i(u,v,\rho)=K_i$ задана в $H^3\setminus\{O\}$, и ее значение в каждой точке области определения совпадает со значением гауссовой (внутренней) кривизны поверхности *F*, заданной явно уравнением $\rho=\rho(u,v)$ в сферических координатах. Функция $\rho=\rho(u,v)$ есть решение приведенного выше уравнения, а u, v – локальные координаты на S_1^2, причем атлас многообразия S_1^2 выбран с условием: $\cos v\ge\alpha>0$ в каждой его карте.

В данном уравнении $\rho_{11},\rho_{12},\rho_{22}$ представляют собой ковариантные производные второго порядка функции $\rho=\rho(u,v)$ относительно метрики единичной сферы S_1^2.

В работах [2, 3, 4] мы выявили условия, которые необходимо наложить на функцию $K_i=K_i(u,v,\rho)$, чтобы обеспечить априорные оценки решения $\rho=\rho(u,v)$ этого уравнения в метрике $C^{m+2,\alpha'}(S_1^2)$. Эти условия имеют следующий вид:

1) $K_i>-1$; 2) $K_i\in C^{m,\alpha}(S_1^2\times R^+)$; 3) $K_i(u,v,\rho)=\dfrac{1}{sh^2\rho}+h(u,v,\rho)$, $h>0$ внутри сферы $S_{\rho_1}^2$ и $h<0$ вне сферы $S_{\rho_2}^2$. Сферы $S_{\rho_1}^2$ и $S_{\rho_2}^2$ ($\rho_1<\rho_2$) являются концентрическими с S_1^2.

Чтобы исследовать введенное уравнение на разрешимость, будем использовать методику продолжения по параметру.

В работе [1] мы построили однопараметрическое семейство уравнений $\Phi_\tau=0$, заменив функцию $K_i(u,v,\rho)=K_i$ на функцию $(K_i)_\tau(u,v,\rho)=\tau K_i(u,v,\rho)+(1-\tau)\cdot\left(\dfrac{\rho_0 ch^4\rho_0}{\rho sh^2\rho ch^2\rho}-1\right)$, где $\tau\in[0,1]$; $\rho_0\in(\rho_1,\rho_2)$: $\Phi_\tau=0$.

$$\rho_{11}\rho_{22}-\rho_{12}^2-\rho_{11}(2cth\rho\cdot\rho_v^2+sh\rho\cdot ch\rho)+2\rho_{12}\rho_u\rho_v cth\rho-\rho_{22}(2cth\rho\cdot\rho_u^2+sh\rho\cdot ch\rho\cos^2 v)-$$
$$-(\rho_v^2\cos^2 v+\frac{\rho_u^2}{\cos v})^2+2\rho_u^2+2\rho_v^2\cos^2 v+sh^2\rho\cos^2 v=$$
$$=\left[\tau K_i+(1-\tau)\left(\frac{\rho_0 ch^4\rho_0}{\rho sh^2\rho ch^2\rho}-1\right)\right]\cdot\frac{(\rho_u^2+\rho_v^2\cos^2 v+sh^2\rho\cdot\cos^2 v)^2}{\cos^2 v}.$$

Поверхность $F:\rho=\rho(u,v)$ с гауссовой кривизной $K_i=K_i(u,v,\rho)$ принадлежит семейству поверхностей $F_\tau:\rho_\tau=\rho_\tau(u,v)$, так как ей соответствует значение τ, равное единице. В это же семейство поверхностей F_τ включена также сфера, концентрическая с S_1^2 и имеющая радиус ρ_0, параметр τ при этом является нулевым. Семейство $\Phi_\tau=0$ является семейством отрицательно эллиптичных уравнений вида Монжа – Ампера на S_1^2 при $K_i(u,v,\rho)>-1$.

В работах [3, 4, 5] получен следующий результат.

Если на функцию $K_i=K_i(u,v,\rho)$ наложить условия, перечисленные в начале статьи, то при любом значении параметра $\tau\in[0,1]$ решение $\rho_\tau=\rho_\tau(u,v)$ равномерно относительно τ ограниченно в метрике $C^{m+2,\alpha'}(S_1^2)$ $(\alpha'<\alpha)$: $\|\rho_\tau\|_{C^{m+2,\alpha'}(S_1^2)}\le M_0$. Постоянная M_0 зависит от чисел ρ_1, ρ_2, $k=\inf\limits_{S_1^2\times[\rho_1,\rho_2]}K_i(u,v,\rho)$ и нормы $\|K_i(u,v,\rho)\|_{C^{m,\alpha}(S_1^2\times[\rho_1,\rho_2])}$.

Пусть T – множество значений параметра $\tau \in [0,1]$, для которых $\Phi_\tau = 0$ разрешимо. Тогда, если T не пустое множество, замкнутое и открытое на компакте $[0,1]$, то $T = [0,1]$. В этом случае исследуемое уравнение разрешимо, так как ему соответствует значение $\tau \in [0,1]$.

В данной работе рассмотрим вопрос о замкнутости T на отрезке $[0,1]$. То, что $T \neq \emptyset$, следует из того факта, что при $\tau = 0$ $\Phi_\tau = 0$ имеет решением сферу $S^2_{\rho_0}$ [3].

Вопрос об открытости множества T на $[0,1]$ в данной работе не рассматривается.

Итак, имеет место следующий результат: множество T значений параметра $\tau \in [0,1]$ является замкнутым на сегменте $[0,1]$, если функция $K_i = K_i(u,v,\rho)$ удовлетворяет условиям, уже перечисленным в данной работе.

Чтобы исследовать основное уравнение на разрешимость далее, нужно перейти к уравнению, полученному следующей заменой переменной: $\omega = \int \frac{d\rho}{sh\rho ch\rho}$ [6]. Эта замена позволяет при старших производных оставить коэффициенты без явно заданной функции $\rho = \rho(u,v)$.

Замена возможна, так как точка O (центр сферы S^2_1) лежит внутри поверхности F, следовательно, $\rho > 0$. В этом случае $\rho_u = \omega_u sh\rho ch\rho$, $\rho_v = \omega_v sh\rho ch\rho$, $\rho_{11} = \omega_{11} sh\rho ch\rho + \omega^2{}_u sh\rho ch\rho \cdot \left(sh^2\rho + ch^2\rho\right)$, $\rho_{12} = \omega_{12} sh\rho ch\rho + \omega_u\omega_v sh\rho ch\rho \cdot \left(sh^2\rho + ch^2\rho\right)$, $\rho_{22} = \omega_{22} sh\rho ch\rho + \omega^2{}_v sh\rho ch\rho \cdot \left(sh^2\rho + ch^2\rho\right)$.

Отсюда и из основного уравнения следует, что функция ω удовлетворяет отрицательно эллиптичному при $K_i > -1$ уравнению:

$$\omega_{11}\omega_{22} - \omega_{12}^2 - \rho_{11}(\omega_v^2 + 1) + 2\omega_{12}\omega_u\omega_v - \omega_{22}(\omega_u^2 + \cos^2 v) -$$

$$-(\omega_v^2 \cos v + \frac{\omega_u^2}{\cos v})^2 sh^2\rho ch^2\rho + \left(\omega_u^2 + \omega_v^2 \cos^2 v K_i(u,v,\rho) \cdot\right)\left(1 - 2sh^2\rho\right) + \frac{\cos^2 v}{ch^2\rho} =$$

$$= K_i(u,v,\rho) \cdot \frac{\left(\omega_u^2 + \omega_v^2 \cos^2 v + \frac{\cos^2 v}{ch^2\rho}\right)^2}{\cos^2 v} \cdot sh^2\rho ch^2\rho.$$

Здесь $\rho = \rho(\omega(u,v))$.

Разрешимость последнего уравнения даст нам одновременно и разрешимость исходного уравнения при тех же достаточных условиях, наложенных на функцию $K_i = K_i(u,v,\rho)$.

Включим новое уравнение в однопараметрическое семейство уравнений $\Phi_{\omega,\tau} = 0$, где параметр $\tau \in [0,1]$:

$$\omega_{11}\omega_{22} - \omega_{12}^2 - \rho_{11}(\omega_v^2 + 1) + 2\omega_{12}\omega_u\omega_v - \omega_{22}(\omega_u^2 + \cos^2 v) - (\omega_v^2 \cos v + \frac{\omega_u^2}{\cos v})^2 sh^2\rho ch^2\rho +$$

$$+(\omega_v^2 \cos v + \frac{\omega_u^2}{\cos v})^2 sh^2\rho ch^2\rho + \left(\omega_u^2 + \omega_v^2 \cos^2 v\right)\left(1 - 2sh^2\rho\right) + \frac{\cos^2 v}{ch^2\rho} = \frac{\tau K_i(u,v,\rho) + (1-\tau)\left(\frac{\rho_0 ch^4\rho_0}{\rho sh^2\rho ch^2\rho} - 1\right)}{\cos^2 v} \cdot$$

$$\cdot \left(\omega_u^2 + \omega_v^2 \cos^2 v + \frac{\cos^2 v}{ch^2\rho}\right)^2 sh^2\rho ch^2\rho .$$

Существование функции $\rho_\tau = \rho_\tau(\omega_\tau(u,v))$, удовлетворяющей $\Phi_{\omega,\tau} = 0,$ гарантируется тем, что $\omega'_\rho = \frac{1}{sh\rho ch\rho} > 0$.

Так как мы имеем равномерную по параметру $\tau \in [0,1]$ ограниченность функции $\rho_\tau = \rho_\tau(u,v)$ в метрике $C^{m+2,\alpha'}(S^2_1)$, то при тех же предположениях относительно функции $K_i = K_i(u,v,\rho)$ следует равномерная по параметру $\tau \in [0,1]$ априорная оценка решения $\omega_\tau = \omega_\tau(u,v)$ семейства $\Phi_{\omega,\tau} = 0$ в метрике $C^{m+2,\alpha'}(S_1^2)$: $\|\omega_\tau\|_{C^{m+2,\alpha'}(S_1^2)} \le M_1$. Постоянная M_1 зависит от чисел ρ_1, ρ_2, $k = \inf\limits_{S_1^2 \times [\rho_1,\rho_2]} K_i(u,v,\rho)$ и нормы $\|K_i(u,v,\rho)\|_{C^{m,\alpha}(S_1^2 \times [\rho_1,\rho_2])}$.

Обозначим через $\overline{T}$ множество значений параметра $\tau \in [0,1]$, для которых существуют решения $\omega_\tau = \omega_\tau(u,v)$ семейства $\Phi_{\omega,\tau} = 0$. $\overline{T}$ не является пустым множеством, так как при $\tau = 0$ семейство $\Phi_\tau = 0$ имеет решение, которое является сферу $S_{\rho_0}^2$ ($\rho = \rho_0$).

Покажем, что множество $\overline{T}$ и, следовательно, T замкнуто на $[0,1]$ при перечисленных выше условиях, наложенных на функцию $K_i = K_i(u,v,\rho)$.

Возьмем последовательность $\tau_n \in \overline{T}$. Допустим, что $\tau_n \to \tau_0$. Нужно показать, что предельная точка $\tau_0 \in \overline{T}$.

Так как $\tau_n \in \overline{T}$, то существует последовательность решений семейства $\Phi_{\omega,\tau} = 0$: $\omega_{\tau_n} \in C^{m+2,\alpha'}(S_1^2)$. Поскольку для всех решений семейства $\Phi_{\omega,\tau} = 0$ есть равномерная по τ оценка в метрике $C^{m+2,\alpha'}(S_1^2)$, то $\|\omega_{\tau_n}\|_{C^{m+2,\alpha'}(S_1^2)} \le M_1$.

В силу этого неравенства последовательность $\{\omega_{\tau_n}\}$ компактна в $C^{m+2,\alpha''}(S_1^2)$, $\alpha'' < \alpha'$.

Тогда ее подпоследовательность $\{\omega_{\tau_{n_k}}\}$ сходится в $C^{m+2,\alpha''}(S_1^2)$ к некоторой функции ω_{τ_0} и $\omega_{\tau_0} \in C^{m+2,\alpha'}(S_1^2)$. Ясно, что ω_{τ_0} является решением семейства уравнений $\Phi_{\omega,\tau} = 0$ при $\tau = \tau_0$, а это и означает, что $\tau_0 \in \overline{T}$. Итак, множество $\overline{T}$ замкнуто на отрезке $[0,1]$.

Утверждение доказано.

---

1. Филимонова, А.П., Юрьева, Т.А. Аналог теорем расположения замкнутых выпуклых поверхностей с заданной функцией внутренней кривизны в пространствах постоянной кривизны // Вестник АмГУ. –2017. – Вып. 79. – С. 17-21.

2. Филимонова, А.П., Юрьева, Т.А. Априорные оценки решения в метрике $C^0(S_1^2)$ уравнения типа Монжа – Ампера на сфере как двумерном многообразии в пространстве постоянной кривизны // Международный научно-исследовательский журнал. – 2016. – № 9-2(51). – С. 132-136.

3. Филимонова, А.П., Юрьева, Т.А. Априорные оценки градиента решения уравнения некоторого класса Монжа – Ампера // Вестник Бурятского гос. ун-та. – 2019. – № 1. – С. 49-55.

4. Юрьева, Т.А., Филимонова, А.П. Априорные оценки решения некоторого дифференциального уравнения типа Монжа – Ампера в метрике $C^2(S_1^2)$ на сфере S_1^2 как двумерном многообразии // Вестник АмГУ. –2019. – Вып. 85. – С. 9-15

5. Юрьева, Т.А., Филимонова, А.П. Априорные оценки решения уравнения типа Монжа – Ампера в метрике $C^{m+2,\alpha'}(S_1^2)$ // Вестник АмГУ. – 2019. – Вып. 87. – С. 17-20.

6. Филимонова, А.П., Юрьева, Т.А. Единственность решения уравнения Монжа – Ампера некоторого класса на сфере как двумерном многообразии // Международный научно-исследовательский журнал. – 2016. – № 5-6. – С. 107-110.