УДК 514.13

Юрьева Татьяна Александровна
Амурский государственный университет,
г. Благовещенск, Россия
E-mail: Yuryevatat@mail.ru
Yuryeva Tatyana Aleksandrovna
Amur State University,
Blagoveshchensk, Russia
E-mail: Yuryevatat@mail.ru
Двоерядкина Наталья Николаевна
Амурский государственный университет,
г. Благовещенск, Россия
E-mail: dvoer@yandex.ru
Dvoeryadkina Natalya Nikolaevna
Amur State University,
Blagoveshchensk, Russia
E-mail: dvoer@yandex.ru

РАВНОМЕРНЫЕ ПО ПАРАМЕТРУ τ ОЦЕНКИ В МЕТРИКЕ $C^{m+2,\alpha'}(S_1^2)$ СЕМЕЙСТВА ЗАМКНУТЫХ ВЫПУКЛЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ С ЗАДАННОЙ ГАУССОВОЙ КРИВИЗНОЙ

PARAMETER-UNIFORM τ ESTIMATES IN THE METRIC $C^{m+2,\alpha'}(S_1^2)$ OF A FAMILY OF CLOSED CONVEX SURFACES WITH A GIVEN GAUSSIAN CURVATURE

Аннотация. В статье приводится доказательство ограниченности решения семейства дифференциальных однопараметрических уравнений типа Монжа – Ампера. Полученный результат используется в исследовании однозначной разрешимости изучаемого дифференциального уравнения.

Abstract. The paper provides a proof of the boundedness of the solution of a family of Monge-Ampere differential one-parameter equations. The obtained result is used in the study of the unique solvability of the differential equation under study.

Ключевые слова: гиперболическое пространство, уравнение Монжа – Ампера, отрицательная эллиптичность, гауссова кривизна.

Key words: hyperbolic space, Monge – Ampere equation, negative ellipticity, gaussian curvature.

DOI: 10.22250/jasu.93.4

К числу задач дифференциальной геометрии относятся задачи существования и единственности поверхностей в различных пространствах с данными геометрическими характеристиками.

Одной из таких характеристик является внутренняя (гауссова) кривизна поверхности.

В нашей работе мы будем рассматривать поверхности из класса регулярных замкнутых выпуклых в трехмерном пространстве отрицательной кривизны (пространство Лобачевского) H^3.

Зафиксируем какую-либо точку O в пространстве H^3. Пусть S_1^2 – сфера в H^3 с радиусом, равным единице, и центром в точке O. Сфера S_1^2 – это двумерное компактное многообразие. Пусть u, v – локальные географические координаты на S_1^2, а атлас S_1^2 выбран с условием: $\cos v \geq \alpha > 0$.

Далее пусть в $H^3 \setminus \{O\}$ определена функция $K_i = K_i(u,v,\rho)$ точки пространства, а F – поверхность в H^3, обладающая следующими свойствами: 1) F – регулярная; 2) F – выпуклая и гомеоморфная сфере S_1^2; 3) F – звездная относительно фиксированной в H^3 точки O (центр S_1^2); 4) внутренняя (гауссова) кривизна F в каждой ее точке совпадает со значением функции $K_i = K_i(u,v,\rho)$ в той же точке.

В локальных координатах u, v F можно задать явно: $\rho = \rho(u,v)$.

Геометрически задача существования и единственности поверхности F в аналитическом аспекте сводится к исследованию на однозначную разрешимость следующего дифференциального уравнения типа Монжа – Ампера на сфере:

$$\rho_{11}\rho_{22} - \rho_{12}^2 - \rho_{11}(2cth\rho \cdot \rho_v^2 + sh\rho \cdot ch\rho) + 2\rho_{12}\rho_u\rho_v cth\rho - \rho_{22}(2cth\rho \cdot \rho_u^2 + sh\rho \cdot ch\rho \cos^2 v) -$$
$$-(\rho_v^2 \cos^2 v + \frac{\rho_u^2}{\cos v})^2 + 2\rho_u^2 + 2\rho_v^2 \cos^2 v + sh^2\rho \cos^2 v = K_i(u,v,\rho)\frac{(\rho_u^2 + \rho_v^2 \cos^2 v + sh^2\rho \cdot \cos^2 v)^2}{\cos^2 v} \quad [1].$$

Здесь ρ_{ij}, ($i, j \in \{1,2\}$) – вторые ковариантные производные функции $\rho = \rho(u,v)$ относительно метрики сферы S_1^2.

В работе [1] было показано, что приведенное выше уравнение является отрицательно эллиптичным при наложении на функцию $K_i = K_i(u,v,\rho)$ условия: $K_i > -1$.

В пространстве H^3 рассмотрим две концентрические с S_1^2 сферы – $S_{\rho_1}^2$ и $S_{\rho_2}^2$ ($\rho_1 < \rho_2$). Пусть $\rho_0 \in (\rho_1, \rho_2)$. Заменяя в приведенном уравнении функцию $K_i(u,v,\rho)$ на функцию $(K_i)_\tau(u,v,\rho)$: $(K_i)_\tau(u,v,\rho) = \tau K_i(u,v,\rho) + (1-\tau)\left(\frac{\rho_0 ch^4\rho_0}{\rho sh^2\rho ch^2\rho} - 1\right)$, где $\tau \in [0,1]$, получаем однопараметрическое семейство $\Phi_\tau = 0$ дифференциальных уравнений типа Монжа – Ампера на сфере S_1^2:

$$\rho_{11}\rho_{22} - \rho_{12}^2 - \rho_{11}(2cth\rho \cdot \rho_v^2 + sh\rho \cdot ch\rho) + 2\rho_{12}\rho_u\rho_v cth\rho - \rho_{22}(2cth\rho \cdot \rho_u^2 + sh\rho \cdot ch\rho \cos^2 v) -$$
$$-(\rho_v^2 \cos^2 v + \frac{\rho_u^2}{\cos v})^2 + 2\rho_u^2 + 2\rho_v^2 \cos^2 v + sh^2\rho \cos^2 v = \left[\tau K_i(u,v,\rho) + (1-\tau)\left(\frac{\rho_0 ch^4\rho_0}{\rho sh^2\rho ch^2\rho} - 1\right)\right] \cdot$$
$$\cdot \frac{(\rho_u^2 + \rho_v^2 \cos^2 v + sh^2\rho \cdot \cos^2 v)^2}{\cos^2 v}, \quad \tau \in [0,1].$$

В работе [2] мы показали, что данное семейство уравнений $\Phi_\tau = 0$ представляет собой семейство отрицательно эллиптичных уравнений при условии, что $K_i(u,v,\rho) = K_i > -1$.

В работе [2] также установили априорные равномерные по параметру τ оценки решения $\rho_\tau = \rho_\tau(u,v)$ ($\tau \in [0,1]$) в метрике $C^0(S_1^2)$: $\rho_1 \leq \rho_\tau \leq \rho_2$. Для этого на функцию $K_i = K_i(u,v,\rho)$ должны быть наложены следующие условия: 1) $K_i > -1$; 2) $K_i(u,v,\rho) = \frac{1}{sh^2\rho} + h(u,v,\rho)$, $h > 0$ внутри сферы $S_{\rho_1}^2$ и $h < 0$ вне сферы $S_{\rho_2}^2$.

Исследуемая поверхность $F : \rho = \rho(u,v)$ основного уравнения входит в семейство F_τ при $\tau = 1$, а при $\tau = 0$ решение ρ_τ есть сфера $S_{\rho_0}^2$ радиуса ρ_0 с центром в точке O.

Имеет место следующий результат:

пусть функция $K_i = K_i(u,v,\rho)$ принадлежит классу регулярности $C^{m,\alpha}(S_1^2 \times R^+)$, где $m \geq 2$, а $0 < \alpha < 1$; кроме того, пусть функция $K_i = K_i(u,v,\rho)$ удовлетворяет приведенным выше условиям, которые обеспечивают оценку ρ_τ в метрике $C^0(S_1^2)$. Тогда при любом значении параметра $\tau \in [0,1]$ решение $\rho_\tau = \rho_\tau(u,v)$ семейства уравнений $\Phi_\tau = 0$ ограничено в метрике $C^{m+2,\alpha'}(S_1^2)$, $\alpha' < \alpha$ постоянной от чисел ρ_1, ρ_2, $k = \inf\limits_{S_1^2 \times [\rho_1,\rho_2]} K_i(u,v,\rho)$ и нормы $\|K_i(u,v,\rho)\|_{C^{m,\alpha}(S_1^2 \times [\rho_1,\rho_2])}$ равномерно относительно параметра τ.

Покажем справедливость сформулированного утверждения.

Решение $\rho_\tau = \rho_\tau(u,v)$ задает замкнутую выпуклую поверхность F_τ с гауссовой кривизной $(K_i)_\tau(u,v,\rho) = \tau K_i(u,v,\rho) + (1-\tau)\left(\dfrac{\rho_0 ch^4 \rho_0}{\rho sh^2 \rho ch^2 \rho} - 1\right)$.

В силу ввода параметра $\tau \in [0,1]$, дифференциальных свойств функции $\dfrac{\rho_0 ch^4 \rho_0}{\rho sh^2 \rho ch^2 \rho} - 1$, линейности операции дифференцирования и наличия равномерной по параметру τ оценки решения $\rho_\tau = \rho_\tau(u,v)$ в метрике $C^0(S_1^2)$ из рассуждений, которые полностью аналогичны приведенным в работах [3, 4, 5], следует равномерная по параметру $\tau \in [0,1]$ априорная оценка решения $\rho_\tau = \rho_\tau(u,v)$ семейства уравнений $\Phi_\tau = 0$ в метрике $C^{m+2,\alpha'}(S_1^2)$: $\|\rho_\tau\|_{C^{m+2,\alpha'}(S_1^2)} \leq M_0$.

Постоянная M_0 зависит от чисел ρ_1, ρ_2, $k_0 = \inf\limits_{S_1^2 \times [\rho_1,\rho_2]} \left(K_i\right)_\tau(u,v,\rho)$ и нормы $\left\|\left(K_i\right)_\tau(u,v,\rho)\right\|_{C^{m,\alpha}(S_1^2 \times [\rho_1,\rho_2])}$. Но так как k_0, $\left\|\left(K_i\right)_\tau(u,v,\rho)\right\|_{C^{m,\alpha}(S_1^2 \times [\rho_1,\rho_2])}$ зависят только от ρ_1, ρ_2, $k = \inf\limits_{S_1^2 \times [\rho_1,\rho_2]} K_i(u,v,\rho)$ и нормы $\|K_i(u,v,\rho)\|_{C^{m,\alpha}(S_1^2 \times [\rho_1,\rho_2])}$, то постоянная M_0 зависит от величин, перечисленных в условиях сформулированного выше утверждения.

Таким образом, утверждение, приведенное в статье, доказано. Тем самым получена априорная оценка решения $\rho_\tau = \rho_\tau(u,v)$ семейства $\Phi_\tau = 0$ в необходимой для дальнейшего исследования исходного уравнения метрике.

---

1. Филимонова, А.П., Юрьева, Т.А. Аналог теорем расположения замкнутых выпуклых поверхностей с заданной функцией внутренней кривизны в пространствах постоянной кривизны // Вестник АмГУ. – 2017. – Вып. 79. – С. 17-21.

2. Филимонова, А.П., Юрьева, Т.А. Априорные оценки решения в метрике $C^0\left(S_1^2\right)$ уравнения типа Монжа – Ампера на сфере как двумерном многообразии в пространстве постоянной кривизны // Международный научно-исследовательский журнал. – 2016. – № 9-2(51). – С. 132-136.

3. Филимонова А.П., Юрьева Т.А. Априорные оценки градиента решения уравнения некоторого класса Монжа – Ампера // Вестник Бурятского государственного университета. Математика, информатика. – 2019. – № 1. – С. 49-55

4. Юрьева, Т.А., Филимонова, А.П. Априорные оценки решения некоторого дифференциального уравнения типа Монжа – Ампера в метрике $C^2(S_1^2)$ на сфере S_1^2 как двумерном многообразии // Вестник АмГУ. – 2019. – – Вып. 85. – С. 9-15

5. Юрьева, Т.А., Филимонова, А.П. Априорные оценки решения уравнения типа Монжа – Ампера в метрике $C^{m+2,\alpha'}(S_1^2)$ // Вестник АмГУ. – 2019. – Вып. 87. – С. 17-20.