есть тождественный нуль: $\delta \equiv 0$. Отсюда, в свою очередь, следует, что $\overline{\rho} - \rho = \dfrac{\overline{\omega} - \omega}{\hat{\omega}_p{}'} \equiv 0$, $\hat{\omega}_p{}' > 0$, следовательно: $\overline{\rho} - \rho \equiv 0$, $\overline{\rho} \equiv \rho$. Исходное уравнение не может иметь двух различных решений.

Основной вывод: пусть задана функция $K(u,v,\rho) \in S_1^2 \times R^+$, а функция $\rho = \rho(u,v)$ задает регулярную замкнутую выпуклую поверхность в E^3, тогда при выполнении условий 1) $K > 0$; 2) $K \in C^1(S_1^2 \times R^+)$; 3) $\left\{K\rho^2\right\}_\rho' \leq 0$ существует не более одной поверхности указанного выше класса, гауссова кривизна которой в каждой точке совпадает со значением функции $K(u,v,\rho)$ в той же точке.

Теорема единственности решения исходного уравнения доказана.

---

1. Филимонова, А.П., Юрьева, Т.А. Обобщение задачи восстановления поверхности с заданной гауссовой кривизной в пространстве постоянной кривизны // Вестник Амурского гос. ун-та. Серия «Естественные и экономические науки». – 2016. – № 75. – С. 16-20.

2. Верещагин, Б.М. Восстановление замкнутой выпуклой поверхности по данной функции гауссовой кривизны // Вопросы глобальной геометрии. Сборник научн. трудов ЛГПИ им. Л. И. Герцена. – Л., 1979. – С. 7-12.

УДК 519.857

В.В. Сельвинский, В.О. Мамаев

ОПТИМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ИНВЕСТИЦИЙ ПРИ ПЛАНИРОВАНИИ ПРОИЗВОДСТВА

Предлагается математическая модель задачи распределения инвестиций в результате поэтапной реализации бизнес-проекта. По своей структуре математическая модель представляет собой задачу динамического программирования. Для большей наглядности рассмотрен пример расчета.

Ключевые слова: динамическое программирование, математическая модель, критерий оптимальности, конкурентоспособность, инвестиции.

OPTIMAL ALLOCATION OF INVESTMENTS IN PRODUCTION PLANNING

The article proposes a mathematical model of the task of allocation of investments as a result of the phased implementation of the business project. By its structure, the mathematical model is a dynamic programming task. An example of calculation is discussed for greater clarity.

Key words: dynamic programming, mathematical model, optimality criterion, competitiveness, investment.

DOI: 10/22250/jasu.3

Введение

Конкуренция является определяющим фактором развития рыночной экономики. Чем выше уровень конкурентной борьбы предприятий за рынок сбыта продукции, источники ресурсов, тем благоприятнее условия для повышения эффективности экономики в целом.

Положительную роль играют также конкурсы грантов капиталовложений в организацию различного рода производства. Один из основных критериев выбора победителя – прибыль, получаемая в результате реализации представленного бизнес-проекта [1, 2].

Расчет распределения инвестиций

В качестве исходной ситуации будем предполагать наличие у конкурсанта некоторого начального капитала в s руб., а также общий объем разыгрываемого гранта S руб. Содержание бизнес-проекта, состоящего из нескольких последовательных этапов (N – количество этапов), включает такое распределение выделяемых средств по этапам, при котором суммарная прибыль проекта будет наибольшей (эту задачу можно переформулировать как задачу минимизации сопутствующих расходов).

Конечно, определяющую роль играет методика расчета суммарной прибыли. При построении функции прибыли будем исходить из естественного предположения, что чем большую долю составляют инвестиции на данном этапе проекта по отношению к общему объему вложенных средств, тем больше ожидаемая прибыль по окончании этапа. Это положение описывается зависимостью:

$$F(u_k, x_k) = \frac{u_k}{x_k},\ k = \overline{1, N}, \tag{1}$$

где u_k (руб.) – средства, которые предстоит освоить на k-м этапе производства; x_k (руб.) – суммарный объем средств, освоенных к окончанию k-го этапа с учетом начального капитала. Общая прибыль всего проекта складывается из прибылей каждого этапа:

$$J(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{x}}) = \sum_{k=1}^{N} F(u_k, x_k). \tag{2}$$

Постановка задачи дискретного динамического программирования требует последовательности состояний исследуемого объекта $\hat{\mathbf{x}} = \left\{x_k; k = \overline{0, N}\right\}$ и управляющих воздействий $\hat{\mathbf{u}} = \{u_k; k = \overline{1, N}\}$, с помощью которых исследуемый объект переходит из предыдущего состояния в последующее.

В задаче о распределении инвестиций указанные последовательности связываются очевидным уравнением состояний:

$$x_k = x_{k-1} + u_k,\ k = \overline{1, N}. \tag{3}$$

Сюда следует добавить информацию о начальном и конечном состоянии:

$$x_0 = s,\ \ x_N = s + S, \tag{4}$$

где s – начальный капитал; S – объем инвестиций.

Равенства (1)-(4) представляют математическую модель поставленной задачи. Последовательность $\hat{\mathbf{u}} = (u_1, ..., u_N)$ называют вектором управлений, а последовательность $\hat{\mathbf{x}} = (x_0, x_1, ..., x_N)$ – траекторией, вектором состояний, или просто дорожной картой; функцию $J(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{x}})$ называют целевой функцией, или критерием оптимальности. Решение задачи состоит в рациональном выборе вектора управлений $\hat{\mathbf{u}} = (u_1, ..., u_N)$ (а значит, в построении соответствующей дорожной карты $\hat{\mathbf{x}} = (x_0, x_1, ..., x_N)$), при котором общая прибыль будет максимальной:

$$J(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{x}}) = \sum_{k=1}^{N} F(u_k, x_k) = \sum_{k=1}^{N} \frac{u_k}{x_k} \to \max. \tag{5}$$

При исследовании целевой функции на экстремум необходимо учитывать ограничения на управления:

$$0 \le u_k \le S + s - x_{k-1},\ k = \overline{1, N}. \tag{6}$$

Эта задача решается методом динамического программирования, основой которого является принцип оптимальности Беллмана: для оптимальности всей траектории $(x_0, x_1, ..., x_N)$ в целом необходимо и достаточно, чтобы оптимальным был любой ее заключительный участок $(x_{k+1}, ..., x_N)$, $k = \overline{0, N-1}$ при любом возможном состоянии x_{k+1} [3].

В соответствии с этим принципом сначала находятся условные управления $\tilde{\mathbf{u}} = \{\tilde{u}_1(x_0), \tilde{u}_2(x_1), \dots, \tilde{u}_N(x_{N-1})\}$ как функции возможного состояния на предыдущем этапе, причем вычислительный процесс начинается с последнего этапа, на котором определяется $\tilde{u}_N(x_{N-1})$ и далее в обратном порядке к $\tilde{u}_1(x_0)$. Затем рассчитываются оптимальные значения $\hat{\mathbf{u}}^* = (u_1^*, ..., u_N^*)$, $\hat{\mathbf{x}}^* = (x_0^*, x_1^*, ..., x_N^*)$ и $J^* = J(\hat{\mathbf{u}}^*, \hat{\mathbf{x}}^*)$ соответственно для векторов управлений, состояний и целевой функции. Последняя процедура достаточно легко осуществляется уже в прямом порядке, начиная с

$$u_1^* = u_1(x_0^*) = u_1(s),\ x_1^* = x_0^* + u_1^* = s + u_1^*$$

и далее по возрастанию с использованием найденного вектора условных управлений $\tilde{\mathbf{u}}$ и уравнения состояний (3).

Указанные особенности применения метода динамического программирования рассмотрим на конкретном примере расчета распределения инвестиций при следующих условиях:

$$N = 3,\ s = 1,\ S = 63;\ x_0 = 1;\ x_3 = 64. \tag{7}$$

В соответствии с принципом Беллмана составляем функцию прибыли на заключительном этапе:

$$Z_3(x_2, u_3) = \frac{u_3}{64},\ u_3 \in [0, 64 - x_2]; \tag{8}$$

в силу монотонного возрастания она достигает максимального значения при

$$u_3 = \tilde{u}_3(x_2) = 64 - x_2 \tag{9}$$

– условном оптимальном управлении;

$$B_3(x_2) = Z_3(x_2, \tilde{u}_3(x_2)) = \frac{64 - x_2}{64} \tag{10}$$

– функция Беллмана заключительного этапа, выражает максимальное значение прибыли на третьем этапе при любом возможном состоянии x_2.

Функция прибыли на двух заключительных этапах:

$$Z_2(x_1, u_2) = B_3(x_2) + F(u_2, x_2) = \frac{64 - x_1 - u_2}{64} + \frac{u_2}{x_1 + u_2},\ u_2 \in [0, 64 - x_1]. \tag{11}$$

Исследуя функцию $Z_2(x_1, u_2)$ на экстремум по переменной u_2, устанавливаем:

$$u_2 = \tilde{u}_2(x_1) = 8\sqrt{x_1} - x_1 \tag{12}$$

– условное оптимальное управление на втором этапе;

$$B_2(x_1) = Z_2(x_1, \tilde{u}_2(x_1)) = 2(1 - \frac{1}{8}\sqrt{x_1}) \tag{13}$$

– функция Беллмана двух заключительных этапов, выражает максимальное значение суммарной прибыли на втором и третьем этапах при любом возможном состоянии x_1.

Функция прибыли на всех трех этапах:

$$Z_1(x_0, u_1) = B_2(x_1) + F(u_1, x_1) = 2(1 - \frac{1}{8}\sqrt{x_0 + u_1}) + \frac{u_1}{x_0 + u_1},$$
$$u_1 \in [0, 64 - x_0] = [0, 63]. \tag{14}$$

Исследуя функцию $Z_1(x_0, u_1)$ на экстремум по переменной u_1, устанавливаем:

$$u_1 = \tilde{u}_1(x_0) = 4(x_0)^{2/3} - x_0 = 3 \tag{15}$$

– условное оптимальное управление на первом этапе (является однозначным);

$$B_1(x_0) = Z_1(x_0, \tilde{u}_1(x_0)) = 3 - \frac{3}{4}(x_0)^{1/3} = \frac{9}{4} \tag{16}$$

– функция Беллмана всего процесса; выражает суммарную прибыль на всех трех этапах.

Осталось определить оптимальный вектор управлений и соответствующий вектор состояний. Последовательно находим:

$$\begin{array}{ll} x_0^* = 1; & u_1^* = \tilde{u}_1(x_0^*) = \tilde{u}_1(1) = 3; \\ x_1^* = x_0^* + u_1^* = 4; & u_2^* = \tilde{u}_2(x_1^*) = \tilde{u}_2(4) = 12; \\ x_2^* = x_1^* + u_2^* = 16; & u_3^* = \tilde{u}_3(x_2^*) = \tilde{u}_3(16) = 48; \\ x_3^* = x_2^* + u_3^* = 64. & \end{array} \tag{17}$$

Таким образом, получаем: $\hat{\mathbf{x}}^* = (1, 4, 16, 64)$ – поэтапный рост инвестиций; $\hat{\mathbf{u}}^* = (3, 12, 48)$ – оптимальное распределение инвестиций по этапам; $J^* = J(\hat{\mathbf{u}}^*, \hat{\mathbf{x}}^*) = B_1(x_0) = 2,25$ – максимально возможная прибыль бизнес-проекта. Указанные значения компонент вектора состояний, вектора управлений и значение целевой функции приведены в условных денежных единицах.

Заключение

Задача, рассмотренная в данной статье, свелась к непрерывной модели многошагового процесса оптимизации. Специфика этой модели состоит в том, что рассматриваемые здесь переменные величины могут непрерывно изменяться на соответствующих множествах. Решение задачи упрощается, если по условию входящие в нее переменные величины могут принимать ограниченное число значений (дискретная модель многошагового процесса оптимизации).

Рассмотренная математическая модель в большей степени подходит для распределения инвестиций в развивающееся производство, когда речь идет о поэтапном увеличении выпуска продукции с максимально возможным конечным результатом. Понятно, что сложность расчетов резко возрастает с увеличением количества этапов в многошаговой модели.

В меньшей степени эти модели подходят для задач, в которых этапы имеют специфические отличия, так как в этом случае будут различаться и целевые функции каждого этапа [4].

1. Дмитриев, А.В. Регулярная и хаотическая динамика социально-экономических систем: монография. – Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2016.

2. Емадаков, Р.Ю. Экономическая конкуренция и конкурентоспособность предприятия (теоретико-методологический анализ): монография. – Йошкар-Ола: ПГТУ, 2017.

3. Понтрягин, Л.С. Знакомство с высшей математикой: Дифференциальные уравнения и их приложения. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 1988 – 208 с.

4. Фатхутдинов, Р.А. Управление конкурентоспособностью организации. Учеб. пособие. – М.: Эксмо, 2005. – 546 с.