УДК 514.13

Т.А. Юрьева, Н.А. Чалкина

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРОГО УРАВНЕНИЯ ТИПА МОНЖА – АМПЕРА НА СФЕРЕ В ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В статье приводится аналитический метод доказательства теоремы единственности решения отрицательно эллиптичного уравнения на сфере как двумерном многообразии в евклидовом пространстве.

Ключевые слова: отрицательно эллиптичное уравнение, кривизна поверхности, двумерное многообразие.

SUFFICIENT CONDITIONS FOR UNIQUENESS OF THE SOLUTION OF SOME EQUATION OF TYPE MONJA – AMPHER ON A SPHERE IN THE EUCLIDEAN SPACE

The article provides an analytical method for proving the uniqueness theorem for solving a negatively elliptic equation on a sphere as a two-dimensional manifold in Euclidean space.

Key words: negative elliptic equation, the curvature of the surface, two-dimensional manifold.

DOI: 10/22250/jasu.2

В работе [1] мы привели уравнение вида Монжа – Ампера на единичной сфере S_1^2 (центр сферы – некоторая точка пространства E^3), являющееся является моделью геометрической задачи восстановления замкнутой выпуклой регулярной поверхности, гауссова кривизна которой в каждой точке совпадает со значением заданной функции в той же точке. Это уравнение имеет следующий вид:

$$\rho_{11}\rho_{22}-\rho_{12}^2-\rho_{11}\frac{2\rho_v^2+\rho^2\sin^2 u}{\rho}+2\rho_{12}\frac{2\rho_u\rho_v}{\rho}-\rho_{22}\frac{2\rho_u^2+\rho^2}{\rho}+2\rho_u^2\sin^2 u+2\rho_v^2+\rho^2\sin^2 u=$$
$$\rho^2\sin^2 u=K(u,v,\rho)\frac{(\rho_u^2\sin^2 u+\rho_v^2+\rho^2\sin^2 u)^2}{\sin^2 u}.$$

Здесь $K(u,v,\rho)$ – заданная функция, принадлежащая классу $C^1(S_1^2\times R^+)$; (u,v) – локальные географические координаты на S_1^2. Атлас на S_1^2 выбран с условием, что в каждой его карте $\sin u\geq x>0$, $\rho=\rho(u,v)$ – решение данного уравнения, а ρ_{ij} $(i,j\in\{1,2\})$ – ковариантные производные функции $\rho(u,v)$ относительно метрики единичной сферы S_1^2.

Это уравнение отрицательно эллиптично при условии, что $K(u,v,\rho)>0$.

При исследовании данного уравнения теорема единственности решения $\rho=\rho(u,v)$ была доказана геометрическим методом [2].

Мы предложим другой – аналитический, более универсальный метод, сводящий решение задачи к исследованию однородного линейного уравнения с последующим применением к нему принципа максимума на компактном многообразии S_1^2.

Для этого перейдем от исходного уравнения к уравнению для некоторой функции $\omega = \int \frac{d\rho}{\rho}$, $\varphi'(\rho) = \frac{1}{\rho} > 0$, – следовательно, замена корректна.

Данная замена приводит к уравнению для функции $\omega(u,v)$, где при старших производных отсутствует явно функция ρ.

Эта замена дает следующие соотношения:

$\rho_u = \omega_u \rho$, $\rho_v = \omega_v \rho$; $\rho_{11} = \omega_{11}\rho + \omega^2{}_u \rho\rho' = \omega_{11}\rho + \omega^2{}_u \rho$; $\rho_{12} = \omega_{12}\rho + \omega_u\omega_v\rho\rho' = \omega_{12}\rho + \omega_u\omega_v\rho$; $\rho_{22} = \omega_{22}\rho + \omega^2{}_v\rho\rho' = \omega_{22}\rho + \omega^2{}_v\rho$.

Тогда уравнение для функции $\omega(u,v)$ имеет вид:

$$\omega_{11}\omega_{22} - \omega_{12}^2 - \omega_{11}(\omega_v^2 + \sin^2 u) + 2\omega_{12}\omega_u\omega_v - \omega_{22}(\omega_u^2 + 1) + 2\omega_u^2 + 2\omega_v^2 + \sin^2 u =$$
$$= K(u,v,\rho)\rho^2 \frac{(\omega_u^2 \sin^2 u + \omega_v^2 + \sin^2 u)^2}{\sin^2 u},$$ где $\rho = \rho(\omega(u,v))$ обеспечено условием $\varphi'(\rho) = \frac{1}{\rho} > 0$.

Уравнение для функции $\omega(u,v)$ отрицательно эллиптично при том же условии, что и исходное, а именно – функция $K(u,v,\rho)$ должна быть положительной.

Предположим теперь, что уравнение для функции $\omega(u,v)$ имеет два различных решения – $\overline{\omega}$ и ω, разность $\overline{\omega} - \omega$ обозначим через δ: $\overline{\omega} - \omega = \delta$.

Введем следующие обозначения:

$a = -\omega_v^2 - \sin^2 u$, $b = -\omega_u\omega_v$, $c = -\omega_u^2 - 1$, $\overline{a} = -\overline{\omega}_v^2 - \sin^2 u$, $\overline{b} = -\overline{\omega}_u\overline{\omega}_v$, $\overline{c} = -\overline{\omega}_u^2 - 1$, $Q = 2\omega_u^2 + 2\omega_v^2 + \sin^2 u$, $Q_1 = \rho^2 \frac{(\omega_u^2 \sin^2 u + \omega_v^2 + \sin^2 u)^2}{\sin^2 u}$.

Тогда вариация δ будет удовлетворять линейному однородному отрицательно эллиптичному уравнению:

$$\frac{1}{2}\delta_{11}(\overline{\omega}_{22} + \overline{a} + \omega_{22} + a) - \delta_{12}(\overline{\omega}_{12} + \overline{b} + \omega_{12} + b) + \frac{1}{2}\delta_{22}(\overline{\omega}_{11} + \overline{c} + \omega_{11} + c) + \Phi_1(u,v)\delta_u +$$
$$+ \Phi_2(u,v)\delta_v + \left(Q - \hat{K}Q_1\right)'_\rho \delta = 0.$$

Отрицательная эллиптичность этого линейного уравнения следует из отрицательной эллиптичности уравнения для функции $\omega(u,v)$ на своих решениях $\overline{\omega}$ и ω. Знак $\wedge$ означает, что значение функции берется в промежуточной точке в силу того, что мы применили теорему о конечных приращениях.

Рассмотрим коэффициент при функции δ в последнем уравнении.

Имеем:

$$\left\{2\omega_u^2 + 2\omega_v^2 + \sin^2 u - K(u,v,\rho)\rho^2 \frac{(\omega_u^2 \sin^2 u + \omega_v^2 + \sin^2 u)^2}{\sin^2 u}\right\}'_\rho = \left\{-K(u,v,\rho)\rho^2\right\}'_\rho.$$

Если мы наложим на функцию $K(u,v,\rho)$ условие $\left\{-K(u,v,\rho)\rho^2\right\}'_\rho \geq 0$, или, что то же самое, $\left\{K(u,v,\rho)\rho^2\right\}'_\rho \leq 0$, то в линейном однородном уравнении относительно вариации δ знак при δ положителен. Само уравнение отрицательно эллиптично. Исходя из принципа максимума, примененного к двумерному компактному многообразию, каковым является сфера S_1^2, мы имеем: вариация δ

есть тождественный нуль: $\delta \equiv 0$. Отсюда, в свою очередь, следует, что $\overline{\rho} - \rho = \dfrac{\overline{\omega} - \omega}{\hat{\omega}_p{}'} \equiv 0$, $\hat{\omega}_p{}' > 0$, следовательно: $\overline{\rho} - \rho \equiv 0$, $\overline{\rho} \equiv \rho$. Исходное уравнение не может иметь двух различных решений.

Основной вывод: пусть задана функция $K(u,v,\rho) \in S_1^2 \times R^+$, а функция $\rho = \rho(u,v)$ задает регулярную замкнутую выпуклую поверхность в E^3, тогда при выполнении условий 1) $K > 0$; 2) $K \in C^1(S_1^2 \times R^+)$; 3) $\left\{K\rho^2\right\}_\rho' \le 0$ существует не более одной поверхности указанного выше класса, гауссова кривизна которой в каждой точке совпадает со значением функции $K(u,v,\rho)$ в той же точке.

Теорема единственности решения исходного уравнения доказана.

---

1. Филимонова, А.П., Юрьева, Т.А. Обобщение задачи восстановления поверхности с заданной гауссовой кривизной в пространстве постоянной кривизны // Вестник Амурского гос. ун-та. Серия «Естественные и экономические науки». – 2016. – № 75. – С. 16-20.

2. Верещагин, Б.М. Восстановление замкнутой выпуклой поверхности по данной функции гауссовой кривизны // Вопросы глобальной геометрии. Сборник научн. трудов ЛГПИ им. Л. И. Герцена. – Л., 1979. – С. 7-12.

УДК 519.857

В.В. Сельвинский, В.О. Мамаев

ОПТИМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ИНВЕСТИЦИЙ ПРИ ПЛАНИРОВАНИИ ПРОИЗВОДСТВА

Предлагается математическая модель задачи распределения инвестиций в результате поэтапной реализации бизнес-проекта. По своей структуре математическая модель представляет собой задачу динамического программирования. Для большей наглядности рассмотрен пример расчета.

Ключевые слова: динамическое программирование, математическая модель, критерий оптимальности, конкурентоспособность, инвестиции.

OPTIMAL ALLOCATION OF INVESTMENTS IN PRODUCTION PLANNING

The article proposes a mathematical model of the task of allocation of investments as a result of the phased implementation of the business project. By its structure, the mathematical model is a dynamic programming task. An example of calculation is discussed for greater clarity.

Key words: dynamic programming, mathematical model, optimality criterion, competitiveness, investment.

DOI: 10/22250/jasu.3

Введение

Конкуренция является определяющим фактором развития рыночной экономики. Чем выше уровень конкурентной борьбы предприятий за рынок сбыта продукции, источники ресурсов, тем благоприятнее условия для повышения эффективности экономики в целом.