Математика. Прикладная математика

УДК 514.13

Т.А. Юрьева

РАВНОМЕРНЫЕ ПО ПАРАМЕТРУ ОЦЕНКИ РЕШЕНИЙ СЕМЕЙСТВА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА МОНЖА – АМПЕРА В МЕТРИКЕ $C^0(S_1^2)$

В статье рассматриваются построение и исследование однопараметрического семейства дифференциальных уравнений типа Монжа – Ампера для определения равномерных по параметру оценок решений семейства в метрике $C^0(S_1^2)$.

Ключевые слова: уравнение Монжа – Ампера, однопараметрическое семейство уравнений, метод продолжения по параметру, гауссова кривизна.

PARAMETER-UNIFORM ESTIMATED DECISIONS OF THE FAMILY OF DIFFERENTIAL EQUATIONS OF MONGE – AMPER TYPE IN METRIC $C^0(S_1^2)$

The article discusses the construction and study of a one-parameter family of differential equations of Monge – Ampère type to determine uniform parameter estimates of family solutions in the metric $C^0(S_1^2)$.

Key words: Monge – Ampère equation, one-parameter family of equations, parameter extension method, Gaussian curvature.

DOI: 10/22250/jasu.1

Рассмотрим уравнение [1]:

$$\rho_{11}\rho_{22}-\rho_{12}^2-\rho_{11}(2cth\rho\cdot\rho_v^2+sh\rho\cdot ch\rho)+2\rho_{12}\rho_u\rho_v cth\rho-\rho_{22}(2cth\rho\cdot\rho_u^2+sh\rho\cdot ch\rho\cos^2 v)-$$
$$-(\rho_v^2\cos^2 v+\frac{\rho_u^2}{\cos v})^2+2\rho_u^2+2\rho_v^2\cos^2 v+sh^2\rho\cos^2 v=K_i(u,v,\rho)\frac{(\rho_u^2+\rho_v^2\cos^2 v+sh^2\rho\cdot\cos^2 v)^2}{\cos^2 v},$$

где ρ_{11}, ρ_{12}, ρ_{22} – вторые ковариантные производные функции $\rho=\rho(u,v)$ относительно метрики S_1^2 единичной сферы с центром в точке O; u, v – локальные географические координаты на S_1^2. Конечный атлас на S_1^2 как двумерном многообразии введен таким образом, что в каждой карте этого атласа локальные координаты u, v подчиняются условию: $\cos v\ge\alpha>0$.

Напомним, что уравнение, приведенное выше, является аналитической трактовкой задачи дифференциальной геометрии о восстановлении замкнутой выпуклой поверхности с заданной функцией внутренней (гауссовой) кривизны в трехмерном гиперболическом пространстве H^3 (пространстве Лобачевского, являющемся пространством постоянной отрицательной кривизны). А именно: пусть в $H^3/\{O\}$, где O – центр S_1^2 в H^3, а поверхность $F:\rho=\rho(u,v)$ принадлежит классу регулярных выпуклых гомеоморфных S_1^2 поверхностей, звездных относительно точки O, задана функция $K_{int}(u,v,\rho)=K_i(u,v,\rho)=K_i$. Тогда вопрос о восстановлении поверхности F, внутренняя (гауссова) кривизна которой в каждой точке равна значению функции $K_{int}(u,v,\rho)=K_i$ в той же точке, сводится к исследованию введенного выше уравнения на однозначную разрешимость.

Доказательство существования решения исследуемого дифференциального уравнения вида Монжа – Ампера проводится методом продолжения по параметру $\tau\in[0,1]$ и с помощью топологических методов. Исследуемое уравнение включим в однопараметрическое семейство $\Phi_\tau=0$.

Пусть T – множество значений параметра $\tau\in[0,1]$, для которых $\Phi_\tau=0$ разрешимо, на отрезке $[0,1]$ не является пустым множеством, одновременно замкнуто и открыто, – следовательно, совпадает со всем сегментом $[0,1]$. Вследствие этого исходное уравнение разрешимо, поскольку ему в семействе уравнений $\Phi_\tau=0$ соответствует некоторое значение $\tau\in[0,1]$.

Зафиксируем в H^3 две концентрические сферы $S^2_{\rho_1}$ и $S^2_{\rho_2}$ с центрами в точке O и радиусами ρ_1 и ρ_2 ($\rho_1<\rho_2$). В исходном исследуемом уравнении заменим функцию $K_i(u,v,\rho)$ на функцию $(K_i)_\tau(u,v,\rho)$ следующим образом: $(K_i)_\tau(u,v,\rho)=\tau K_i(u,v,\rho)+(1-\tau)\left(\dfrac{\rho_0 ch^4\rho_0}{\rho sh^2\rho ch^2\rho}-1\right)$, где $\tau\in[0,1]$, а $\rho_0\in(\rho_1,\rho_2)$.

В результате получаем следующее семейство уравнений $\Phi_\tau=0$:

$$\rho_{11}\rho_{22}-\rho_{12}^2-\rho_{11}(2cth\rho\cdot\rho_v^2+sh\rho\cdot ch\rho)+2\rho_{12}\rho_u\rho_v cth\rho-\rho_{22}(2cth\rho\cdot\rho_u^2+sh\rho\cdot ch\rho\cos^2 v)-$$
$$-(\rho_v^2\cos^2 v+\frac{\rho_u^2}{\cos v})^2+2\rho_u^2+2\rho_v^2\cos^2 v+sh^2\rho\cos^2 v=\left[\tau K_i(u,v,\rho)+(1-\tau)\left(\frac{\rho_0 ch^4\rho_0}{\rho sh^2\rho ch^2\rho}-1\right)\right]\cdot$$
$$\cdot\frac{(\rho_u^2+\rho_v^2\cos^2 v+sh^2\rho\cdot\cos^2 v)^2}{\cos^2 v}.$$

Исходная поверхность F с гауссовой кривизной $K_i(u,v,\rho)$ входит в семейство поверхностей F_τ, заданных решениями $\rho_\tau=\rho_\tau(u,v)$ уравнений $\Phi_\tau=0$.

Данной поверхности $F:\rho=\rho(u,v)$ соответствует единичное значение параметра τ, т.е. $F_\tau=F$.

В семейство поверхностей F_τ входит также сфера с центром в точке O и радиусом ρ_0, которой соответствует нулевое значение параметра τ.

В самом деле, при $\tau=0$ имеем следующее уравнение:

$$\rho_{11}\rho_{22}-\rho_{12}^2-\rho_{11}(2cth\rho\cdot\rho_v^2+sh\rho\cdot ch\rho)+2\rho_{12}\rho_u\rho_v cth\rho-\rho_{22}(2cth\rho\cdot\rho_u^2+sh\rho\cdot ch\rho\cos^2 v)-$$
$$-(\rho_v^2\cos^2 v+\frac{\rho_u^2}{\cos v})^2+2\rho_u^2+2\rho_v^2\cos^2 v+sh^2\rho\cos^2 v=\left(\frac{\rho_0 ch^4\rho_0}{\rho sh^2\rho ch^2\rho}-1\right)\times$$
$$\times\frac{(\rho_u^2+\rho_v^2\cos^2 v+sh^2\rho\cdot\cos^2 v)^2}{\cos^2 v},$$

так как при подстановке $\rho=\rho_0=const$ в это уравнение оно обращается в тождество:

$$\left(\frac{\rho_0 ch^4\rho_0}{\rho_0 sh^2\rho_0 ch^2\rho_0}-1\right)\cdot sh^4\rho_0\cos^2 v\equiv\left(\frac{ch^2\rho_0}{sh^2\rho_0}-1\right)\cdot sh^4\rho_0\cos^2 v\equiv$$
$$\equiv\left(\frac{ch^2\rho_0-sh^2\rho_0}{sh^2\rho_0}\right)\cdot sh^4\rho_0\cos^2 v\equiv sh^2\rho_0\cos^2 v,$$

что соответствует при обращении вторых и первых производных функции левой части уравнения в нули тому же выражению.

Кроме того, решение $\rho=\rho_0$ является единственным при $\tau=0$.

Напомним, что условием единственности решения исходного уравнения является следующее: $\left[(K_i+1)sh^2\rho ch^2\rho\right]_\rho^{/}<0$ [2].

В данном случае $(K_i)_0=\dfrac{\rho_0 ch^4\rho_0}{\rho sh^2\rho ch^2\rho}-1$.

Рассмотрим выражение $\left[((K_i)_0+1)sh^2\rho ch^2\rho\right]_\rho^{/}$, получим $\left(\dfrac{\rho_0 ch^4\rho_0}{\rho}-1\right)_\rho^{/}=-\dfrac{\rho_0 ch^4\rho_0}{\rho^2}<0$, что удовлетворяет условию единственности решения указанного типа уравнения.

Итак, $\Phi_\tau=0$ при $\tau=0$ однозначно разрешимо и решением его является сфера с центром в точке O и радиусом ρ_0.

Далее, функция $(K_i)_\tau(u,v,\rho)$ является выпуклой комбинацией функций $K_i(u,v,\rho)$ и $\dfrac{\rho_0 ch^4\rho_0}{\rho sh^2\rho ch^2\rho}-1$.

Так как исходное уравнение отрицательно эллиптично при $K_i(u,v,\rho)>-1$, $\dfrac{\rho_0 ch^4\rho_0}{\rho sh^2\rho ch^2\rho}-1>-1$ в силу положительности $\dfrac{\rho_0 ch^4\rho_0}{\rho sh^2\rho ch^2\rho}$, то и $(K_i)_\tau(u,v,\rho)>-1$. Это означает, что семейство уравнений $\Phi_\tau=0$ есть однопараметрическое семейство отрицательно эллиптических уравнений.

Снова напомним лемму 1 работы [3].

Лемма 1. Пусть в H^3 зафиксированы две концентрические сферы – $S^2_{\rho_1}$ и $S^2_{\rho_2}$ (ρ_1 и ρ_2 – радиусы сфер соответственно, причем $\rho_1<\rho_2$) с центром в точке O. Пусть функция $K_{int}(u,v,\rho)$ определена на $S^2_1\times R^+$ и подчиняется условиям: 1) $K_{int}>-1$; 2) $K_{int}=\dfrac{1}{sh^2\rho}+h(u,v,\rho)$ при $h>0$ внутри сферы $S^2_{\rho_1}$ и $h<0$ вне сферы $S^2_{\rho_2}$. Тогда всякое решение $\rho=\rho(u,v)$ исследуемого уравнения задает поверхность F: $\rho=\rho(u,v)$, лежащую между сферами $S^2_{\rho_1}$ и $S^2_{\rho_2}$.

Аналогичный результат для поверхности F_τ, которому соответствуют уравнения $\Phi_\tau=0$ однопараметрического семейства с $\tau\in[0,1]$ можно сформулировать следующим образом. Если функция $K_i(u,v,\rho)$ удовлетворяет условиям леммы 1, то при любом значении параметра $\tau\in[0,1]$ решение $\rho_\tau=\rho_\tau(u,v)$ семейства $\Phi_\tau=0$ задает замкнутую выпуклую поверхность, лежащую между концентрическими с S^2_1 сферами $S^2_{\rho_1}$ и $S^2_{\rho_2}$.

Покажем справедливость этого утверждения – докажем, что $(K_i)_\tau=\dfrac{1}{sh^2\rho}+\ h_\tau(u,v,\rho)$, где функция $h_\tau>0$ внутри сферы $S^2_{\rho_1}$ и $h_\tau<0$ вне сферы $S^2_{\rho_2}$.

Имеем: $(K_i)_\tau=\tau\left(\dfrac{1}{sh^2\rho}+h_\tau(u,v,\rho)\right)+(1-\tau)\left(\dfrac{1}{sh^2\rho}+\dfrac{\rho_0 ch^4\rho_0}{\rho sh^2\rho ch^2\rho}-1-\dfrac{1}{sh^2\rho}\right)=$

$$=\frac{1}{sh^2\rho}+\tau\left(h_\tau(u,v,\rho)\right)+(1-\tau)\left(\frac{\rho_0 ch^4\rho_0}{\rho sh^2\rho ch^2\rho}-1-\frac{1}{sh^2\rho}\right)=\frac{1}{sh^2\rho}+h_\tau(u,v,\rho),$$

где $h_\tau = \tau h + (1-\tau)\left(\dfrac{\rho_0 ch^4\rho_0}{\rho sh^2\rho ch^2\rho} - 1 - \dfrac{1}{sh^2\rho}\right)$.

Предположим, что $\rho < \rho_1$. Тогда по условию леммы 1 $h > 0$, а $-\dfrac{1}{sh^2\rho} = \dfrac{\rho_0 ch^4\rho_0}{\rho sh^2\rho ch^2\rho} -$ $-1 = \dfrac{\rho_0 ch^4\rho_0 - \rho sh^2\rho ch^2\rho - \rho ch^2\rho}{\rho sh^2\rho ch^2\rho} > \dfrac{\rho_1 ch^4\rho_1 - \rho_1 sh^2\rho_1 ch^2\rho_1 - \rho_1 ch^2\rho_1}{\rho sh^2\rho ch^2\rho} = 0$ в силу равенства нулю числителя дроби: $\rho_1 ch^2\rho_1(ch^2\rho_1 - sh^2\rho_1 - 1) = \rho_1 ch^2\rho_1(1-1) = 0$, а $\rho_0 > \rho_1$, так как $\rho_0 \in (\rho_1, \rho_2)$. Отсюда $h_\tau > 0$ при $\rho < \rho_1$ как выпуклая комбинация положительных функций.

Допустим теперь, что $\rho > \rho_2$.

Тогда по условию леммы 1 $h < 0$,

$\dfrac{\rho_0 ch^4\rho_0}{\rho sh^2\rho ch^2\rho} - 1 - \dfrac{1}{sh^2\rho} < \dfrac{\rho_2 ch^4\rho_2 - \rho_2 sh^2\rho_2 ch^2\rho_2 - \rho_2 ch^2\rho_2}{\rho sh^2\rho ch^2\rho} = 0$, так как $\rho_0 < \rho_2$ ($\rho_0 \in (\rho_1, \rho_2)$),

а числитель дроби

$$\rho_2 ch^4\rho_2 - \rho_2 sh^2\rho_2 ch^2\rho_2 - \rho_2 ch^2\rho_2 = \rho_2 ch^2\rho_2(ch^2\rho_2 - sh^2\rho_2 - 1) = \rho_2 ch^2\rho_2(1-1) = 0.$$

Кроме того, имеем $h < 0$. В этом случае $h_\tau < 0$ при $\rho > \rho_2$ как выпуклая комбинация отрицательных функций.

Таким образом, $(K_i)_\tau = \dfrac{1}{sh^2\rho} + h_\tau(u,v,\rho)$, где $h_\tau > 0$ внутри сферы $S^2_{\rho_1}$ и $h_\tau < 0$ вне сферы $S^2_{\rho_2}$.

Применим теперь к функции $(K_i)_\tau(u,v,\rho)$ лемму 1 и получаем, что при любом значении параметра $\tau \in [0,1]$ решение $\rho_\tau = \rho_\tau(u,v)$ однопараметрического семейства уравнений $\Phi_\tau = 0$ задает замкнутую выпуклую поверхность F_τ, лежащую между концентрическими с S^2_1 сферами $S^2_{\rho_1}$ и $S^2_{\rho_2}$.

В свою очередь, это означает, что имеет место априорная оценка при любом значении параметра $\tau \in [0,1]$ решений однопараметрического семейства уравнений $\Phi_\tau = 0$ в метрике $C^0(S^2_1)$, т.е. для всякого значения $\tau \in [0,1]$ есть оценка: $\rho_1 \le \rho_\tau \le \rho_2$. В частности, эта оценка справедлива для решения исходного уравнения ($\tau = 1$) и для сферы $S^2_{\rho_0}$ ($\rho_0 \in (\rho_1, \rho_2)$), для которой $\tau = 0$.

---

1. Филимонова, А.П. Оценка в метрике C^2 и единственность выпуклой гомеоморфной сфере поверхности с заданной гауссовой кривизной в H^3 // Вопросы глобальной геометрии: Сборник научн. трудов. ЛГПИ им. А.И. Герцена. – Л., 1979. – С. 64-68.

2. Филимонова, А.П., Юрьева, Т.А. Единственность решения уравнения Монжа – Ампера некоторого класса на сфере как двумерном многообразии // Международный научно-исследовательский журнал. – 2016. – № 6-5 (48).– С. 107-110.

3. Филимонова, А.П., Юрьева, Т.А. Априорные оценки решения некоторого дифференциального уравнения типа Монжа – Ампера в метрике $C^2(S^2_1)$ на сфере S^2_1 как двумерном многообразии // Вестник Амурского гос. ун-та. Серия «Естественные и экономические науки». – 2019. – № 85. – С. 9-15.

4. Филимонова, А.П., Юрьева, Т.А. Априорные оценки градиента решения уравнения некоторого класса Монжа – Ампера // Вестник Бурятского гос. ун-та. Серия «Математика, информатика». – 2019. – № 1. – С. 49-55.