2. Чучуева, И.А., Павлов, Ю.Н. Модель прогнозирования временных рядов по выборке максимального подобия: Дис. …канд. техн. наук / МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2012. – 153 с. – Режим доступа: http://www.mbureau.ru/sites/default/files/pdf/Chuchueva-Dissertation.pdf.

3. Временной ряд: Википедия. Свободная энциклопедия – Режим доступа: https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%92%D1%80%D0%B5%D0%BC%D0%B5%D0%BD%D0%BD%D0%BE%D0%B9_%D1%80%D1%8F%D0%B4

4. Метод экспоненциального сглаживания: 4analytics. Решения для бизнес-анализа. – Режим доступа: https://4analytics.ru/prognozirovanie/malo-dannix-dlya-prognoza-model-eksponencialnogo-sglajivaniya.html

5. Прогноз по методу экспоненциального сглаживания Хольта: 4analytics. Решения для бизнес-анализа. – Режим доступа: https://4analytics.ru/prognozirovanie/prognoz-po-metodu-eksponencialnogo-sglajivaniya-xolta.html

УДК 514.13

Т.А. Юрьева, А.П. Филимонова

АПРИОРНЫЕ ОЦЕНКИ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ТИПА МОНЖА – АМПЕРА В МЕТРИКЕ $C^{m+2,\alpha'}(S_1^2)$

В статье рассматривается доказательство существования априорных оценок решения дифференциального уравнения типа Монжа – Ампера в метрике $C^{m+2,\alpha'}(S_1^2)$.

Ключевые слова: гиперболическое пространство, уравнение Монжа – Ампера, отрицательная эллиптичность, бельтрамиевы координаты.

В работе [1] мы ввели дифференциальное уравнение вида:

$$\rho_{11}\rho_{22}-\rho_{12}^2-\rho_{11}(2cth\rho\cdot\rho_v^2+sh\rho\cdot ch\rho)+2\rho_{12}\rho_u\rho_v cth\rho-\rho_{22}(2cth\rho\cdot\rho_u^2+sh\rho\cdot ch\rho\cos^2 v)-$$
$$-(\rho_v^2\cos^2 v+\frac{\rho_u^2}{\cos v})^2+2\rho_u^2+2\rho_v^2\cos^2 v+sh^2\rho\cos^2 v=$$
$$=K_i(u,v,\rho)\frac{(\rho_u^2+\rho_v^2\cos^2 v+sh^2\rho\cdot\cos^2 v)^2}{\cos^2 v};$$

здесь ρ_{11}, ρ_{12}, ρ_{22} – вторые ковариантные производные функции $\rho=\rho(u,v)$ относительно метрики единичной сферы S_1^2.

Напомним, что к данному уравнению приводит задача восстановления регулярной выпуклой гомеоморфной сфере S_1^2 (O – центр сферы, радиус равен 1), звездной относительно точки O поверхности $F:\rho=\rho(u,v)$ в трехмерном пространстве H^3 постоянной отрицательной кривизны (пространство Лобачевского) по ее функции гауссовой кривизны. S_1^2 рассматривается как двумерное многообразие, атлас на S_1^2 выбран так, что в каждой его карте выполняется неравенство $\cos v\geq\alpha>0$; u, v – сферические координаты. Уравнение отрицательно эллиптично при условии $K_{\text{int}}(u,v,\rho)=K_i(u,v,\rho)=K_i>-1$ [1].

Исследование дифференциальных уравнений такого типа начинается с получения априорных оценок решения в соответствующей метрике. В работе [2] мы получили оценку решения $\rho=\rho(u,v)$ уравнения в метрике $C^0(S_1^2)$, то есть оценку самого решения.

Лемма 1. Пусть в H^3 зафиксированы две концентрические сферы с центрами в точке O и радиусами ρ_1 и ρ_2 ($\rho_1 < \rho_2$). Пусть функция $K_{\text{int}}(u,v,\rho) = K_i$ определена в $S_1^2 \times R^+$ и удовлетворяет условиям: 1) $K_i > -1$; 2) $K_i = \dfrac{1}{sh^2\rho} + h(u,v,\rho)$, где $h > 0$ внутри сферы $S_{\rho_1}^2$ и $h < 0$ – вне сферы $S_{\rho_2}^2$. В этом случае всякое решение $\rho = \rho(u,v)$ исследуемого уравнения задает поверхность $F : \rho = \rho(u,v)$, расположенную между сферами $S_{\rho_1}^2$ и $S_{\rho_2}^2$. Иными словами, при перечисленных выше условиях, наложенных на функцию $K_{\text{int}}(u,v,\rho) = K_i$, есть априорная оценка решения $\rho(u,v)$ уравнения $\rho_1 \le \rho(u,v) \le \rho_2$.

Оценки решения $\rho = \rho(u,v)$ исследуемого уравнения в метрике $C^1(S_1^2)$ нами получены в работе [3].

Лемма 2. Пусть $K_{\text{int}}(u,v,\rho)$ удовлетворяет условиям леммы 1, а $\rho = \rho(u,v) \in C^2(S_1^2)$ – решение исследуемого уравнения. Тогда первые производные функции $\rho = \rho(u,v)$ ограничены некоторой постоянной, зависящей только от чисел ρ_1 и ρ_2: $|\rho_u(u,v)| \le \dfrac{sh^2\rho_2}{th\rho_1}$, $|\rho_v(u,v)| \le \dfrac{sh^2\rho_2}{th\rho_1}$.

В работе [4] показан процесс получения априорных оценок решения $\rho = \rho(u,v)$ исследуемого уравнения в метрике $C^2(S_1^2)$. Результат сформулируем в виде леммы 3.

Лемма 3. Пусть функция $K_{\text{int}}(u,v,\rho)$ удовлетворяет условиям леммы 1 и принадлежит классу $C^2(S_1^2 \times R^+)$. Тогда любое решение $\rho = \rho(u,v)$ исследуемого уравнения, принадлежащее классу $C^2(S_1^2)$, ограничено в метрике $C^2(S_1^2)$ постоянной, которая зависит от чисел ρ_1, ρ_2 и свойств функции $K_{\text{int}}(u,v,\rho) = K_i$, а именно: $\inf\limits_{S_1^2 \times [\rho_1,\rho_2]} K_i(u,v,\rho)$, $\|K_i(u,v,\rho)\|_{C^2(S_1^2 \times [\rho_1,\rho_2])}$.

Теперь приведем доказательство существования априорных оценок решения $\rho = \rho(u,v)$ исследуемого уравнения в метрике $C^{m+2,\alpha'}(S_1^2)$.

Справедливо следующее утверждение.

Пусть функция $K_{\text{int}}(u,v,\rho) = K_i$ принадлежит классу $C^{m,\alpha}(S_1^2 \times R^+)$, $m \ge 2$, $0 < \alpha < 1$. Далее пусть функция $K_{\text{int}}(u,v,\rho) = K_i$ удовлетворяет условиям леммы 1. Тогда решение $\rho = \rho(u,v)$ исследуемого уравнения ограничено в метрике $C^{m+2,\alpha'}(S_1^2)$, где $\alpha' < \alpha$, причем постоянная $k = \inf\limits_{S_1^2 \times [\rho_1,\rho_2]} K_i(u,v,\rho)$ и норма функции $K_i(u,v,\rho)$: $\|K_i(u,v,\rho)\|_{C^2(S_1^2 \times [\rho_1,\rho_2])}$.

Из условий сформулированного утверждения, наложенных на $\rho(u,v)$ и функцию $K_i(u,v,\rho)$, и результата работы [4] следует, что решение $z = z(x,y)$ уравнения: $rt - s^2 = (K_i + 1)\dfrac{[(1 + p^2 + q^2) - (px + qy - z)^2]^2}{(1 - x^2 - y^2 - z^2)^2}$, полученного в той же работе, ограничено в метрике $C^2(K_2)$. Напомним, что мы пользовались моделью Кэли – Клейна пространства H^3, x, y, z – бельтрамиевые координаты, а круг K_2 в плоскости xOy введен в указанной выше работе. Тогда из работы [5] решение $z = z(x,y)$ уравнения в бельтрамиевых координатах в предположении принадлежности функции $K_i(u,v,\rho) = K_i$ классу $C^{m,\alpha}(S_1^2 \times R^+)$ будет ограничено в круге K_2 и в метрике $C^{m+2,\alpha'}$,

$\alpha' < \alpha$. Норма $\|z\|_{m+2,\alpha'} \le C'$, где постоянная C' зависит от чисел ρ_1, ρ_2, $k = \inf\limits_{S_1^2 \times [\rho_1, \rho_2]} K_i(u,v,\rho)$ и $\|K_i(u,v,\rho)\|_{C^{m,\alpha}(S_1^2 \times R^+)}$.

В работе [4] введены функции $\overline{u} = \overline{u}(u,v)$, $\overline{v} = \overline{v}(u,v)$. Эти функции аналитические.

Из равенств [4]:

$$\cos\overline{v} \cdot \frac{\partial \overline{v}}{\partial u} = \sin v_0 \cos v \sin(u - u_0),$$

$$\cos\overline{v} \cdot \frac{\partial \overline{v}}{\partial v} = \cos v_0 \cos v + \sin v_0 \sin v \cos(u - u_0),$$

$$\cos\overline{v}\cos\overline{u} \cdot \frac{\partial \overline{u}}{\partial u} - \sin\overline{v}\sin\overline{u} \cdot \frac{\partial \overline{v}}{\partial u} = \cos v \cos(u - u_0),$$

$$\cos\overline{v}\cos\overline{u} \cdot \frac{\partial \overline{u}}{\partial v} - \sin\overline{v}\sin\overline{u} \cdot \frac{\partial \overline{v}}{\partial v} = -\sin v \sin(u - u_0),$$

$$\cos\overline{v} \cdot \frac{\partial^2 \overline{v}}{\partial u^2} - \sin\overline{v} \cdot \left(\frac{\partial \overline{v}}{\partial u}\right)^2 = \sin v_0 \cos v \sin(u - u_0),$$

$$\cos\overline{v} \cdot \frac{\partial^2 \overline{v}}{\partial u \partial v} - \sin\overline{v} \cdot \frac{\partial \overline{v}}{\partial v} \cdot \frac{\partial \overline{v}}{\partial u} = -\sin v_0 \sin v \sin(u - u_0),$$

$$\cos\overline{v} \cdot \frac{\partial^2 \overline{v}}{\partial v^2} - \sin\overline{v} \cdot \left(\frac{\partial \overline{v}}{\partial v}\right)^2 = -\cos v_0 \sin v + \sin v_0 \cos v \cos(u - u_0),$$

$$\cos\overline{v}\cos\overline{u} \cdot \frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial u^2} - \sin\overline{v}\cos\overline{u} \cdot \frac{\partial \overline{v}}{\partial u}\frac{\partial \overline{u}}{\partial u} - \cos\overline{v}\sin\overline{u} \cdot \left(\frac{\partial \overline{u}}{\partial u}\right)^2 - \sin\overline{v}\sin\overline{u} \cdot \frac{\partial^2 \overline{v}}{\partial u^2} -$$
$$-\cos\overline{v}\sin\overline{u} \cdot \left(\frac{\partial \overline{v}}{\partial u}\right)^2 - \sin\overline{v}\cos\overline{u} \cdot \frac{\partial \overline{v}}{\partial u}\frac{\partial \overline{u}}{\partial u} = -\cos v \sin(u - u_0),$$

$$\cos\overline{v}\cos\overline{u} \cdot \frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial u \partial v} - \sin\overline{v}\cos\overline{u} \cdot \frac{\partial \overline{v}}{\partial v}\frac{\partial \overline{u}}{\partial u} - \cos\overline{v}\sin\overline{u} \cdot \frac{\partial \overline{u}}{\partial u}\frac{\partial \overline{u}}{\partial v} - \sin\overline{v}\sin\overline{u} \cdot \frac{\partial^2 \overline{v}}{\partial v \partial u} -$$
$$-\cos\overline{v}\sin\overline{u} \cdot \frac{\partial \overline{v}}{\partial v}\frac{\partial \overline{u}}{\partial u} - \sin\overline{v}\cos\overline{u} \cdot \frac{\partial \overline{u}}{\partial v}\frac{\partial \overline{v}}{\partial u} = -\sin v \cos(u - u_0),$$

$$\cos\overline{v}\cos\overline{u} \cdot \frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial v^2} - \sin\overline{v}\cos\overline{u} \cdot \frac{\partial \overline{v}}{\partial v}\frac{\partial \overline{u}}{\partial v} - \sin\overline{u}\cos\overline{v}\left(\frac{\partial \overline{u}}{\partial v}\right)^2 - \sin\overline{v}\sin\overline{u} \cdot \frac{\partial^2 \overline{v}}{\partial v^2} -$$
$$-\cos\overline{v}\sin\overline{u} \cdot \left(\frac{\partial \overline{v}}{\partial v}\right)^2 - \sin\overline{v}\cos\overline{u} \cdot \frac{\partial \overline{v}}{\partial v}\frac{\partial \overline{u}}{\partial v} = -\cos v \sin(u - u_0),$$

а также тех равенств, которые получаются из вышеприведенных последовательным дифференцированием, следует: производные этих функций любого порядка в силу того, что при старших производных стоят множителями функции $\cos\overline{v}$ и $\cos\overline{v}\cos\overline{u}$, близкие к 1 и (-1) соответственно, в окрестности точки $(\pi, 0)$.

Тогда из соотношений [4]:

$$\rho_{uu} = \overline{\rho}_{\overline{u}\overline{u}}\left(\frac{\partial \overline{u}}{\partial u}\right)^2 + 2\overline{\rho}_{\overline{u}\overline{v}}\frac{\partial \overline{u}}{\partial u}\frac{\partial \overline{v}}{\partial u} + \overline{\rho}_{\overline{u}}\frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial u^2} + \overline{\rho}_{\overline{v}\overline{v}}\left(\frac{\partial \overline{v}}{\partial u}\right)^2 + \overline{\rho}_{\overline{v}}\frac{\partial^2 \overline{v}}{\partial u^2},$$

$$\rho_{uv} = \overline{\rho}_{\overline{u}\overline{u}}\frac{\partial \overline{u}}{\partial u}\frac{\partial \overline{u}}{\partial v} + \overline{\rho}_{\overline{u}\overline{v}}\frac{\partial \overline{u}}{\partial u}\frac{\partial \overline{v}}{\partial v} + \overline{\rho}_{\overline{u}}\frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial v \partial u} + +\overline{\rho}_{\overline{v}\overline{u}}\frac{\partial \overline{u}}{\partial v}\frac{\partial \overline{v}}{\partial u} + \overline{\rho}_{\overline{v}\overline{v}}\frac{\partial \overline{v}}{\partial v}\frac{\partial \overline{v}}{\partial u} + \overline{\rho}_{\overline{v}}\frac{\partial^2 \overline{v}}{\partial u \partial v},$$

$$\rho_{vv}=\overline{\rho}_{\overline{u}\overline{u}}\left(\frac{\partial\overline{u}}{\partial v}\right)^2+2\overline{\rho}_{\overline{u}\overline{v}}\frac{\partial\overline{v}}{\partial v}\frac{\partial\overline{u}}{\partial v}+\overline{\rho}_{\overline{u}}\frac{\partial^2\overline{u}}{\partial v^2}+\overline{\rho}_{\overline{v}\overline{v}}\left(\frac{\partial\overline{v}}{\partial v}\right)^2+\overline{\rho}_{\overline{v}}\frac{\partial^2\overline{v}}{\partial v^2}$$

последовательным дифференцированием получаем равенства, из которых следует ограниченность функции $\rho(u,v)$ в метрике $C^{m+2,\alpha'}$ в некоторой окрестности при условии ограниченности функции $\overline{\rho}(\overline{u},\overline{v})$ в соответствующей при движении D окрестности.

Напомним, что $\overline{\rho}=\overline{\rho}(\overline{u},\overline{v})$ и D введены в работах [3, 4]. Движение D (модель Кэли – Клейна пространства H^3) задано матрицей:

$$D=\begin{pmatrix}\cos v_0 & -\sin v_0\sin u_0 & -\sin v_0\cos u_0\\ 0 & \cos u_0 & -\sin u_0\\ -\sin v_0 & -\cos v_0\sin u_0 & -\cos v_0\cos u_0\end{pmatrix}$$

В работе [3] мы получили равенства:

$\overline{\rho}_{\overline{u}}(\cos\overline{v}\cos\overline{u}-z_x\cdot\sin\overline{v}-z_y\cos\overline{v}\sin\overline{u})=sh\overline{\rho}ch\overline{\rho}\cos\overline{v}(z_x\sin\overline{u}+z_y\cos\overline{u})$,

$\overline{\rho}_{\overline{v}}(\cos\overline{v}\cos\overline{u}-z_x\cdot\sin\overline{v}-z_y\cos\overline{v}\sin\overline{u})=sh\overline{\rho}ch\overline{\rho}(\sin\overline{v}\cos\overline{u}+z_x\cos\overline{v}-z_y\sin\overline{v}\sin\overline{u})$, а в работе [4] путем дифференцирования этих равенств по $\overline{u}$ и $\overline{v}$ вторично получили равенства, приводить которые вследствие их объема в данной работе не будем. С помощью последовательного дифференцирования последних приходим к выводу, что из ограниченности функции $z=z(x,y)$ в метрике $C^{m+2,\alpha'}$ в круге K_2 следует ограниченность функции $\overline{\rho}(\overline{u},\overline{v})$ в метрике $C^{m+2,\alpha'}$ в окрестности ω, так как при старших производных функции $\overline{\rho}(\overline{u},\overline{v})$ множителем всегда является выражение: $\cos\overline{v}\cos\overline{u}-z_x\cdot\sin\overline{v}-z_y\cos\overline{v}\sin\overline{u}$. Это выражение в указанной выше окрестности близко к (-1).

Из приведенных нами рассуждений следует наличие «локальной» оценки решения $\rho=\rho(u,v)$ исследуемого уравнения в метрике $C^{m+2,\alpha'}$. В силу того, что сфера S_1^2 является компактным многообразием, из наличия «локальных» оценок решения уравнения следует ограниченность решения $\rho=\rho(u,v)$ в метрике $C^{m+2,\alpha'}(S_1^2)$.

Постоянная ограничения зависит от чисел ρ_1, ρ_2, $k=\inf\limits_{S_1^2\times[\rho_1,\rho_2]}K_i(u,v,\rho)$ и нормы функции $K_i(u,v,\rho)$: $\|K_i(u,v,\rho)\|_{C^2(S_1^2\times[\rho_1,\rho_2])}$.

Утверждение, сформулированное нами в данной работе, доказано.

1. Филимонова, А.П., Юрьева, Т.А. Аналог теорем расположения замкнутых выпуклых поверхностей с заданной функцией внутренней кривизны в пространствах постоянной кривизны // Вестник АмГУ. – 2017. – Вып. 79. – С. 17-21.

2. Филимонова, А.П., Юрьева, Т.А. Априорные оценки решения в метрике $C^0\left(S_1^2\right)$ уравнения типа Монжа – Ампера на сфере как двумерном многообразии в пространстве постоянной кривизны // Международный научно-исследовательский журнал. – 2016. – № 9-2(51). – С. 132-136.

3. Филимонова, А.П., Юрьева, Т.А. Априорные оценки градиента решения уравнения некоторого класса Монжа – Ампера // Вестник Бурятского гос. ун-та. – Серия «Математика, информатика». – 2019. – № 1. – С. 49-55.

4. Филимонова, А.П., Юрьева, Т.А. Априорные оценки решения некоторого дифференциального уравнения типа Монжа – Ампера в метрике $C^2(S_1^2)$ на сфере S_1^2 как двумерном многообразии // Вестник Амурского гос. ун-та. – 2019. – № 85. – С. 9-15.

5. Nirenberg, L. On nonlinear elliptic partial differential equations and H’’older continuity // Comm. Pure Appl. Math. – 1953. – № 1.