УДК 514.13

Т.А. Юрьева, А.П. Филимонова

АПРИОРНЫЕ ОЦЕНКИ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТИПА МОНЖА – АМПЕРА В МЕТРИКЕ $C^2(S_1^2)$ НА СФЕРЕ S_1^2 КАК ДВУМЕРНОМ МНОГООБРАЗИИ

В статье рассматривается процедура построения априорных оценок вторых производных решения нелинейного дифференциального уравнения Монжа – Ампера.

Ключевые слова: гиперболическое пространство, уравнение Монжа – Ампера, отрицательная эллиптичность, бельтрамиевы координаты.

PRIORI ESTIMATES OF THE SOLUTION OF A CERTAIN DIFFERENTIAL EQUATION OF THE MONGE – AMPER TYPE IN A METRIC $C^2(S_1^2)$ IN THE SPHERE S_1^2 OF TWO-DIMENSIONAL MANIFOLD

The article discusses the procedure for constructing a priori estimates of the second derivatives of the solution of the nonlinear Monge – Ampere differential equation.

Key words: hyperbolic space, Monge – Ampere equation, negative ellipticity, beltramia coordinates.

К задачам дифференциальной геометрии относится, в частности, задача восстановления поверхностей того или иного типа в пространствах постоянной кривизны по заданным геометрическим характеристикам (гауссова кривизна, средняя кривизна, сумма главных радиусов кривизны и др.).

Будем рассматривать трехмерное пространство Лобачевского H^3 постоянной отрицательной кривизны (гиперболического пространства H^3). Фиксируем в нем некоторую точку O. Через S_1^2 обозначим сферу единичного радиуса с центром в точке O. S_1^2 – двумерное многообразие, атлас на S_1^2 выбран так, что локальные координаты u, v каждой карты подчиняются неравенству: $\cos v \geq \alpha > 0$.

Далее будем рассматривать класс регулярных выпуклых гомеоморфных S_1^2 поверхностей звездных относительно выбранной точки O (центра S_1^2). Каждую поверхность из этого класса можно явно задать в сферических координатах функцией $\rho = \rho(u,v)$. Обозначим произвольную поверхность этого класса через F. Итак, $F : \rho = \rho(u,v)$.

Если в $H^3 \setminus \{O\}$ определена некоторая функция $K_{\text{int}}(u,v,\rho) = K_i(u,v,\rho)$, то функция $\rho = \rho(u,v)$, задающая поверхность F, в каждой точке которой внутренняя (гауссова) кривизна равна значению функции K_{int} в той же точке, является решением следующего уравнения на S_1^2:

$$\rho_{11}\rho_{22}-\rho_{12}^2-\rho_{11}(2cth\rho\cdot\rho_v^2+sh\rho\cdot ch\rho)+2\rho_{12}\rho_u\rho_v cth\rho-\rho_{22}(2cth\rho\cdot\rho_u^2+sh\rho\cdot ch\rho\cos^2 v)-$$
$$-(\rho_v^2\cos^2 v+\frac{\rho_u^2}{\cos v})^2+2\rho_u^2+2\rho_v^2\cos^2 v+sh^2\rho\cos^2 v==K_i(u,v,\rho)\frac{(\rho_u^2+\rho_v^2\cos^2 v+sh^2\rho\cdot\cos^2 v)^2}{\cos^2 v},$$

где ρ_{11}, ρ_{12}, ρ_{22} – вторые ковариантные производные функции $\rho=\rho(u,v)$ относительно метрики единичной сферы S_1^2 [1].

Геометрическая задача о восстановлении поверхности $F:\rho=\rho(u,v)$ в пространстве H^3, гауссова кривизна которой в каждой точке равна значению функции $K_{\text{int}}(u,v,\rho)$ в той же точке, сводится к нахождению достаточных условий существования и единственности решения обозначенного выше уравнения.

Исследуемое уравнение является отрицательно эллиптичным уравнением типа Монжа – Ампера при условии: $K_{\text{int}}>-1$ ($K_{ext}>0$, K_{ext} – внешняя кривизна).

Получение априорных оценок исследуемого нами уравнения в метрике $C^2(S_1^2)$ предполагает:

а) наличие оценок в метрике $C^0(S_1^2)$, т.е. оценок самого решения $\rho(u,v)$ уравнения;

б) наличие оценок в метрике $C^1(S_1^2)$, т.е. оценок первых производных решения $\rho=\rho(u,v)$ уравнения;

в) наличие оценок вторых производных решения $\rho=\rho(u,v)$ данного уравнения на S_1^2.

При этом нужно выявить условия, которым должна подчиняться функция $K_{\text{int}}(u,v,\rho)$.

Имеем следующие утверждения.

Лемма 1. Пусть $S_{\rho_1}^2$ и $S_{\rho_2}^2$ – две концентрические сферы (с центром O) в H^3, причем $\rho_1<\rho_2$ (ρ_1 и ρ_2 – радиусы сфер). Пусть функция $K_{\text{int}}(u,v,\rho)$ определена на $S_1^2\times R^+$ и подчиняется условиям: 1) $K_{\text{int}}>-1$ (условие эллиптичности уравнения); 2) $K_{\text{int}}=\frac{1}{sh^2\rho}+h(u,v,\rho)$, где $h>0$ внутри сферы $S_{\rho_1}^2$ и $h<0$ вне сферы $S_{\rho_2}^2$. Тогда любое решение $\rho=\rho(u,v)$ исследуемого уравнения задает поверхность F, которая расположена между сферами $S_{\rho_1}^2$ и $S_{\rho_2}^2$.

Это означает, что решение исследуемого уравнения $\rho(u,v)$ имеет априорные оценки в метрике $C^0(S_1^2)$: $\rho_1\le\rho(u,v)\le\rho_2$ [2].

Лемма 2. Пусть $K_{\text{int}}(u,v,\rho)$ удовлетворяет условиям леммы 1, а $\rho=\rho(u,v)\in C^2(S_1^2)$ – решение исследуемого уравнения. Тогда первые производные функции $\rho=\rho(u,v)$ ограничены некоторой постоянной, зависящей только от чисел ρ_1 и ρ_2: $|\rho_u(u,v)|\le\frac{sh^2\rho_2}{th\rho_1}$, $|\rho_v(u,v)|\le\frac{sh^2\rho_2}{th\rho_1}$ [4].

Теперь перейдем к процессу установления априорных оценок вторых производных решения $\rho=\rho(u,v)$ рассматриваемого уравнения.

Схема их получения в общем аналогична той, которая использовалась для получения оценок первых производных решения уравнения [градиент].

В работе [5] указан процесс получения априорных оценок вторых производных решения уравнения: $rt-s^2=\phi(x,y,z,p,q)$ ($r=z_{xx}$, $t=z_{yy}$, $s=z_{xy}$, $p=z_x$, $q=z_y$) в предположении выпуклости функции $\phi(x,y,z,p,q)$ по переменным p и q в плоскости этих переменных и любом z.

На самом деле здесь оценки можно получить, если предполагать выпуклость функции $\phi(x,y,z,p,q)$ по переменным p и q в области, заданной априорными оценками решения в метрике

C^1. Данный факт и позволяет воспользоваться результатом при доказательстве существования оценок вторых производных исследуемого уравнения.

Имеет место следующее утверждение.

Пусть функция $K_{\text{int}}(u,v,\rho)$ принадлежит классу $C^2(S_1^2 \times R^+)$ и удовлетворяет условиям леммы 1. Тогда всякое решение $\rho=\rho(u,v)\in C^4(S_1^2)$ исследуемого нами уравнения ограничено в метрике $C^2(S_1^2)$ постоянной, зависящей от ρ_1, ρ_2 и свойств функции K_{int}.

Рассмотрим доказательство данного утверждения.

Пусть $M_0(u_0,v_0,\rho(u_0,v_0))$ – некоторая фиксированная точка поверхности $\bar{F}$, заданной решением $\rho=\rho(u,v)$ исследуемого уравнения.

Рассуждения будем вести в карте γ атласа сферы S_1^2, где $\gamma^{-1}:\begin{cases} x = th1\sin v, \\ y = th1\cos v\sin u, \\ z = th1\cos u\cos v, \end{cases}$ $\cos v \ge \alpha > 0$.

Пусть $D:\begin{pmatrix} \cos v_0 & -\sin v_0 \sin u_0 & -\sin v_0 \cos u_0 \\ 0 & \cos u_0 & -\sin u_0 \\ -\sin v_0 & -\cos v_0 \sin u_0 & -\cos v_0 \cos u_0 \end{pmatrix}$ – движение пространства H^3.

Обозначим через ω – область на сфере S_1^2, а через $\bar{\omega}=D(\omega)$. Соответствующие им при гомеоморфизме ρ области на F и $D(F)=\bar{F}$ обозначим соответственно через Ω и $\bar{\Omega}$.

Пусть $\Omega\subset F$ является такой окрестностью точки M_0, что ω и $\bar{\omega}=D(\omega)$ принадлежат области определения выбранной карты γ сферы S_1^2. Это возможно, так как точка $D(u_0,v_0)=(\pi,0)$ принадлежит карте γ.

Покажем сначала, что ограниченность вторых производных функции $\rho=\rho(u,v)$ в некоторой области следует из ограниченности вторых производных функции $\bar{\rho}(\bar{u},\bar{v})$, задающей поверхность $\bar{F}=D(F)$ в соответствующей при движении D области.

Движение D переводит точку $M(u,v,\rho(u,v))\in F$ в точку $\bar{M}(\bar{u},\bar{v},\rho(\bar{u},\bar{v}))\in\bar{F}$.

Из формул, с помощью которых определены γ^{-1} и движение D, следует, что $\bar{u}=\bar{u}(u,v)$, $\bar{v}=\bar{v}(u,v)$, причем обе эти функции аналитические.

Покажем, что первые и вторые частные производные функций $\bar{u}(u,v)$ и $\bar{v}(u,v)$ по u и v ограничены в некоторой окрестности точки (u_0,v_0).

Из равенств $\cos\bar{v}\cdot\frac{\partial\bar{v}}{\partial u}=\sin v_0\cos v\sin(u-u_0)$, $\cos\bar{v}\cdot\frac{\partial\bar{v}}{\partial v}=\cos v_0\cos v+\sin v_0\sin v\cos(u-u_0)$, $\cos\bar{v}\cos\bar{u}\cdot\frac{\partial\bar{u}}{\partial u}-\sin\bar{v}\sin\bar{u}\cdot\frac{\partial\bar{v}}{\partial u}=\cos v\cos(u-u_0)$, $\cos\bar{v}\cos\bar{u}\cdot\frac{\partial\bar{u}}{\partial v}-\sin\bar{v}\sin\bar{u}\cdot\frac{\partial\bar{v}}{\partial v}=-\sin v\sin(u-u_0)$ [4] следует ограниченность производных $\frac{\partial\bar{v}}{\partial u}$, $\frac{\partial\bar{v}}{\partial v}$, $\frac{\partial\bar{u}}{\partial u}$, $\frac{\partial\bar{u}}{\partial v}$ в некоторой достаточно малой окрестности точки (u_0,v_0), так как $\bar{v}$ в такой окрестности достаточно близок $\bar{v}_0=\bar{v}(u_0,v_0)=0$, а угол $\bar{u}$ в ней же достаточно близок $\bar{u}_0=\bar{u}(u_0,v_0)=\pi$.

Напомним, что $\bar{v}$ – угол между $O\bar{M}$ и проекцией $O\bar{M}$ на плоскость (zOy), $\bar{u}$ – угол между проекцией $O\bar{M}$ на плоскость (zOy) и осью (Oz).

Дифференцируя приведенные выше равенства еще раз по u и v, имеем:

$$\cos\bar{v}\cdot\frac{\partial^2\bar{v}}{\partial u^2}-\sin\bar{v}\cdot\left(\frac{\partial\bar{v}}{\partial u}\right)^2=\sin v_0\cos v\sin(u-u_0),$$

$$\cos\bar{v}\cdot\frac{\partial^2\bar{v}}{\partial u\partial v}-\sin\bar{v}\cdot\frac{\partial\bar{v}}{\partial v}\cdot\frac{\partial\bar{v}}{\partial u}=-\sin v_0\sin v\sin(u-u_0),$$

$$\cos\bar{v}\cdot\frac{\partial^2\bar{v}}{\partial v^2}-\sin\bar{v}\cdot\left(\frac{\partial\bar{v}}{\partial v}\right)^2=-\cos v_0\sin v+\sin v_0\cos v\cos(u-u_0),$$

$$\cos\bar{v}\cos\bar{u}\cdot\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial u^2}-\sin\bar{v}\cos\bar{u}\cdot\frac{\partial\bar{v}}{\partial u}\frac{\partial\bar{u}}{\partial u}-\cos\bar{v}\sin\bar{u}\cdot\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial u}\right)^2-\sin\bar{v}\sin\bar{u}\cdot\frac{\partial^2\bar{v}}{\partial u^2}-$$
$$-\cos\bar{v}\sin\bar{u}\cdot\left(\frac{\partial\bar{v}}{\partial u}\right)^2-\sin\bar{v}\cos\bar{u}\cdot\frac{\partial\bar{v}}{\partial u}\frac{\partial\bar{u}}{\partial u}=-\cos v\sin(u-u_0),$$

$$\cos\bar{v}\cos\bar{u}\cdot\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial u\partial v}-\sin\bar{v}\cos\bar{u}\cdot\frac{\partial\bar{v}}{\partial v}\frac{\partial\bar{u}}{\partial u}-\cos\bar{v}\sin\bar{u}\cdot\frac{\partial\bar{u}}{\partial u}\frac{\partial\bar{u}}{\partial v}-\sin\bar{v}\sin\bar{u}\cdot\frac{\partial^2\bar{v}}{\partial v\partial u}-$$
$$-\cos\bar{v}\sin\bar{u}\cdot\frac{\partial\bar{v}}{\partial v}\frac{\partial\bar{u}}{\partial u}-\sin\bar{v}\cos\bar{u}\cdot\frac{\partial\bar{u}}{\partial v}\frac{\partial\bar{v}}{\partial u}=-\sin v\cos(u-u_0),$$

$$\cos\bar{v}\cos\bar{u}\cdot\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial v^2}-\sin\bar{v}\cos\bar{u}\cdot\frac{\partial\bar{v}}{\partial v}\frac{\partial\bar{u}}{\partial v}-\sin\bar{u}\cos\bar{v}\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial v}\right)^2-\sin\bar{v}\sin\bar{u}\cdot\frac{\partial^2\bar{v}}{\partial v^2}-$$
$$-\cos\bar{v}\sin\bar{u}\cdot\left(\frac{\partial\bar{v}}{\partial v}\right)^2-\sin\bar{v}\cos\bar{u}\cdot\frac{\partial\bar{v}}{\partial v}\frac{\partial\bar{u}}{\partial v}=-\cos v\sin(u-u_0).$$

Из этих равенств и ограниченности первых производных функций $\bar{u}(u,v)$, $\bar{v}(u,v)$ в достаточно малой окрестности точки (u_0,v_0) следует ограниченность $\frac{\partial^2\bar{v}}{\partial u^2}$, $\frac{\partial^2\bar{v}}{\partial u\partial v}$, $\frac{\partial^2\bar{v}}{\partial v^2}$, $\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial u^2}$, $\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial u\partial v}$, $\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial v^2}$ в той же окрестности точки (u_0,v_0).

Отсюда и из соотношений

$$\rho_{uu}=\bar{\rho}_{\bar{u}\bar{u}}\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial u}\right)^2+2\bar{\rho}_{\bar{u}\bar{v}}\frac{\partial\bar{u}}{\partial u}\frac{\partial\bar{v}}{\partial u}+\bar{\rho}_{\bar{u}}\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial u^2}+\bar{\rho}_{\bar{v}\bar{v}}\left(\frac{\partial\bar{v}}{\partial u}\right)^2+\bar{\rho}_{\bar{v}}\frac{\partial^2\bar{v}}{\partial u^2},$$

$$\rho_{uv}=\bar{\rho}_{\bar{u}\bar{u}}\frac{\partial\bar{u}}{\partial u}\frac{\partial\bar{u}}{\partial v}+\bar{\rho}_{\bar{u}\bar{v}}\frac{\partial\bar{u}}{\partial u}\frac{\partial\bar{v}}{\partial v}+\bar{\rho}_{\bar{u}}\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial v\partial u}++\bar{\rho}_{\bar{v}\bar{u}}\frac{\partial\bar{u}}{\partial v}\frac{\partial\bar{v}}{\partial u}+\bar{\rho}_{\bar{v}\bar{v}}\frac{\partial\bar{v}}{\partial v}\frac{\partial\bar{v}}{\partial u}+\bar{\rho}_{\bar{v}}\frac{\partial^2\bar{v}}{\partial u\partial v},$$

$$\rho_{vv}=\bar{\rho}_{\bar{u}\bar{u}}\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial v}\right)^2+2\bar{\rho}_{\bar{u}\bar{v}}\frac{\partial\bar{v}}{\partial v}\frac{\partial\bar{u}}{\partial v}+\bar{\rho}_{\bar{u}}\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial v^2}+\bar{\rho}_{\bar{v}\bar{v}}\left(\frac{\partial\bar{v}}{\partial v}\right)^2+\bar{\rho}_{\bar{v}}\frac{\partial^2\bar{v}}{\partial v^2}$$

следует ограниченность вторых производных функции $\rho(u,v)$ в некоторой достаточно малой окрестности точки (u_0,v_0), которую обозначим через ω_1, при условии ограниченности первых и вторых производных функции $\bar{\rho}(\bar{u},\bar{v})$ в соответствующей окрестности $\bar{\omega}_1$.

Обозначим через $\omega_2=\omega_1\cap\omega$. На плоскости ($xOy$) возьмем круг K_1 с центром в точке O и радиусом r_1 таким, чтобы цилиндр вырезал из $\bar{F}=D(F)$ область $\bar{\Omega}_3\subset D(\Omega_2)$. Область $\bar{\Omega}_3$ содержит точку $M_0(\pi,0,\bar{\rho}(\pi,0))$ и однозначно проектируется на плоскость (xOy) и, следовательно, в круге K_1 может быть задана явным уравнением в бельтрамиевых координатах: $z=z(x,y)$. Напомним, что, как и в работе [4], мы использовали модель Кэли – Клейна пространства H^3.

Покажем, что ограниченность первых и вторых производных функции $z = z(x,y)$ внутри круга K_1 влечет за собой ограниченность вторых производных функции $\bar\rho = \bar\rho(\bar u, \bar v)$ в некоторой подобласти $\overline{\omega_3}$.

Дифференцируя равенства [4]:

$$\bar\rho_{\bar u}(\cos\bar v\cos\bar u - z_x\cdot\sin\bar v - z_y\cos\bar v\sin\bar u) = sh\bar\rho ch\bar\rho\cos\bar v(z_x\sin\bar u + z_y\cos\bar u),$$

$$\bar\rho_{\bar v}(\cos\bar v\cos\bar u - z_x\cdot\sin\bar v - z_y\cos\bar v\sin\bar u) = sh\bar\rho ch\bar\rho(\sin\bar v\cos\bar u + z_x\cos\bar v - z_y\sin\bar v\sin\bar u)$$ еще раз по $\bar u$ и $\bar v$, будем иметь:

$$\bar\rho_{\bar u\bar u}(\cos\bar v\cos\bar u - z_x\cdot\sin\bar v - z_y\cos\bar v\sin\bar u) + \bar\rho_{\bar u}[-\cos\bar v\sin\bar u - z_{xx}\bar\rho_{\bar u}\sin^2\bar v\cdot\frac{1}{ch\bar\rho} -$$
$$-z_{xy}\sin\bar v\left(\frac{2}{ch^2\bar\rho}\bar\rho_{\bar u}\cos\bar v\sin\bar u + th\bar\rho\cos\bar v\cos\bar u\right) - z_{yy}\cos\bar v\sin\bar u\cdot$$
$$\cdot\left(\frac{1}{ch^2\bar\rho}\bar\rho_{\bar u}\cos\bar v\sin\bar u + th\bar\rho\cos\bar v\cos\bar u\right) - z_y\cos\bar v\cos\bar u] = (sh^2\bar\rho + ch^2\bar\rho)\cdot$$
$$\cdot\bar\rho_{\bar u}\cos\bar v(\sin\bar u + z_y\cos\bar u) + sh\bar\rho ch\bar\rho\cos\bar v[\cos\bar u + z_{xy}\cos\bar u\sin\bar v\cdot\frac{1}{ch^2\bar\rho}\bar\rho_{\bar u} +$$
$$+z_{yy}\cos\bar u\left(\frac{1}{ch^2\bar\rho}\bar\rho_{\bar u}\cos\bar v\sin\bar u + th\bar\rho\cos\bar v\cos\bar u\right) - z_y\sin\bar u],$$

$$\bar\rho_{\bar u\bar v}(\cos\bar v\cos\bar u - z_x\cdot\sin\bar v - z_y\cos\bar v\sin\bar u) + \bar\rho_{\bar u}[-\sin\bar v\cos\bar u - z_{xx}\sin\bar v\cdot$$
$$\cdot\left(\frac{1}{ch^2\bar\rho}\bar\rho_{\bar v}\sin\bar v + th\bar\rho\cos\bar v\right) - z_x\cos\bar v -$$
$$-z_{yy}\left(\frac{2}{ch^2\bar\rho}\bar\rho_{\bar v}\cos\bar v\sin\bar u\sin\bar v + th\bar\rho\sin^2\bar v\sin\bar u - th\bar\rho\cos^2\bar v\sin\bar u\right) - z_{yy}\cos\bar v\sin\bar u\cdot$$
$$\cdot\left(\frac{1}{ch^2\bar\rho}\bar\rho_{\bar v}\cos\bar v\sin\bar u - th\bar\rho\sin\bar v\sin\bar u\right) + z_y\sin\bar v\sin\bar u = (sh^2\bar\rho + ch^2\bar\rho)\cdot$$
$$\cdot\bar\rho_{\bar v}\cos\bar v(\sin\bar u + z_y\cos\bar u) - sh\bar\rho ch\bar\rho\sin\bar v(\sin\bar u + z_y\cos\bar u) + sh\bar\rho ch\bar\rho\cos\bar v[z_{xy}\cos\bar u\cdot$$
$$\cdot\left(\frac{1}{ch^2\bar\rho}\bar\rho_{\bar v}\sin\bar v + th\bar\rho\cos\bar v\right) + z_{yy}\cos\bar u\left(\frac{1}{ch^2\bar\rho}\bar\rho_{\bar v}\cos\bar v\sin\bar u - th\bar\rho\sin\bar v\sin\bar u\right)],$$

$$\bar\rho_{\bar v\bar v}(\cos\bar v\cos\bar u - z_x\cdot\sin\bar v - z_y\cos\bar v\sin\bar u) + \bar\rho_{\bar v}[-\cos\bar v\cos\bar u - z_{xx}\cdot$$
$$\cdot\left(\frac{1}{ch^2\bar\rho}\bar\rho_{\bar v}\sin\bar v + th\bar\rho\cos\bar v\right)\sin\bar v - \left(\frac{2}{ch^2\bar\rho}\cos\bar v\sin\bar u\sin\bar v + th\bar\rho\sin^2\bar v\sin\bar u - th\bar\rho\cos^2\bar v\sin\bar u\right)\cdot -$$
$$\cdot z_{yy} - z_x\cos\bar v - z_{yy}\cdot\left(\frac{1}{ch^2\bar\rho}\bar\rho_{\bar v}\cos\bar v\sin\bar u - th\bar\rho\sin\bar v\sin\bar u\right)\cos\bar v\sin\bar u + z_y\sin\bar v\sin\bar u] =$$
$$= (sh^2\bar\rho + ch^2\bar\rho)\cdot\bar\rho_{\bar v}(\sin\bar v\cos\bar u + z_x\cos\bar v - z_y\sin\bar v\sin\bar u) + sh\bar\rho ch\bar\rho(\cos\bar v\cos\bar u +$$
$$z_{xx}\cdot\left(\frac{1}{ch^2\bar\rho}\bar\rho_{\bar v}\sin\bar v + th\bar\rho\cos\bar v\right)\cdot\cos\bar v - z_x\sin\bar v +$$
$$+z_{xy}\left(-2th\bar\rho\sin\bar v\cos\bar v\sin\bar u + \frac{1}{ch^2\bar\rho}\bar\rho_{\bar v}\sin\bar u(\cos^2\bar v - \sin^2\bar v)\right) - z_y\cos\bar v\sin\bar u].$$

Вырежем прямым цилиндром на круге K_2 с центром в точке O и радиусом r_2 ($r_1 < r_2$) такую область $\bar\Omega_4 \subset \bar\Omega_3$, чтобы для точек области $\overline{\omega_4}$ выражение $\cos\bar v\cos\bar u - z_x\sin\bar v - z_y\cos\bar v\sin\bar u$ было бы близко к (-1). Это возможно, так как $\overline{\omega_3}$ – окрестность точки $(\pi, 0)$. Тогда в области $\overline{\omega_4}$ вторые производные функции $\bar{\rho}(\bar{u}, \bar{v})$ ограничены, если в круге K_2 ограничены первые и вторые производные функции $z(x, y)$.

Область $\overline{\Omega}_3$ задается явным уравнением в бельтрамиевых координатах: $z = z(x, y)$.

Поверхность $z = z(x, y)$ имеет гауссову кривизну $K_{\text{int}} = K_i$, которая определяется из соотношения

$$K_i + 1 = \frac{LN - M^2}{EG - F^2},$$

где

$$L = \frac{r}{(1 - x^2 - y^2 - z^2)^2 H};$$

$$N = \frac{t}{(1 - x^2 - y^2 - z^2)^2 H};$$

$$M = \frac{s}{(1 - x^2 - y^2 - z^2)^2 H} \quad (r = z_{xx}, t = z_{yy}, s = z_{xy});$$

$$E = \frac{(x + zp)^2 + (1 - x^2 - y^2 - z^2) \cdot (1 + p^2)}{(1 - x^2 - y^2 - z^2)^2};$$

$$G = \frac{(y + zq)^2 + (1 - x^2 - y^2 - z^2) \cdot (1 + q^2)}{(1 - x^2 - y^2 - z^2)^2};$$

$$F = \frac{(x + zp)(y + zq) + (1 - x^2 - y^2 - z^2)pq}{(1 - x^2 - y^2 - z^2)^2} \quad (p = z_x, q = z_y);$$

$$H^2 = EG - F^2 = \frac{(1 + p^2 + q^2) - (px + qy - z)^2}{(1 - x^2 - y^2 - z^2)^3} \quad [6].$$

Отсюда поверхность $z = z(x, y)$, имеющая данную гауссову кривизну K_i, удовлетворяет в K_1 уравнению: $rt - s^2 = (K_i + 1)\dfrac{[(1 + p^2 + q^2) - (px + qy - z)^2]^2}{(1 - x^2 - y^2 - z^2)^2}$.

Ограниченность $\|z(x, y)\|_{C^2}$ в круге K_2 следует из результата работы [5].

Для этого функция $\phi(x, y, z, p, q) = (K_i + 1)\dfrac{[(1 + p^2 + q^2) - (px + qy - z)^2]^2}{(1 - x^2 - y^2 - z^2)^2}$ правой части этого уравнения должна удовлетворять условиям: 1) $\phi > 0$; 2) ϕ является замкнутой по переменным p и q; 3) $\phi \in C^2$.

Первое и третье условия с очевидностью следуют из условий приведенных ранее. Второе условие выполняется, так как справедливо утверждение [3].

Для любых действительных чисел α и β имеет место неравенство:

$\varphi_{pp}\alpha^2 + 2\varphi_{pq}\alpha\beta + \varphi_{qq}\beta^2 \geq C(z, p, q)(\alpha^2 + \beta^2)$, $C(z, p, q) = 4(k + 1)(1 + p^2 + q^2)z^2$ – положительная и непрерывная по всем аргументам функция, $k = \inf\limits_{S_1^2 \times [\rho_1, \rho_2]} K_i(u, v, \rho)$; k существует в силу компактности $S_1^2 \times [\rho_1, \rho_2]$. Тогда из работы [5] следует, что в K_2 имеет место оценка: $\|z(x, y)\|_{C^2} \leq C$, где C зависит от ρ_1, ρ_2, $k = \inf\limits_{S_1^2 \times [\rho_1, \rho_2]} K_i(u, v, \rho)$ и $\|K_i\|_{C^2}$. Отсюда следует существование априорной оценки функции $\bar{\rho}(\bar{u},\bar{v})$ в метрике $C^2(\overline{\varpi}_4)$, а это, в свою очередь, показывает существование априорной оценки функции $\rho=\rho(u,v)$ в метрике $C^2(D^{-1}(\overline{\varpi}_4))$, D – движение пространства H^3, приведенное выше соответствующей матрицей.

Если бы точка попала в область определения какой-либо другой карты γ_1 сферы S_1^2, то рассуждения были бы полностью аналогичны тем, которые приведены для карты γ атласа сферы S_1^2.

В силу компактности сферы S_1^2 и доказательства нами существования «локальных» оценок в результате имеем существование априорных оценок решения $\rho=\rho(u,v)$ исследуемого исходного уравнения в метрике $C^2(S_1^2)$. Эта оценка зависит лишь от ρ_1, ρ_2, $k=\inf\limits_{S_1^2\times[\rho_1,\rho_2]} K_i(u,v,\rho)$ и $\left\|K_i(u,v,\rho)\right\|_{C^2(S_1^2\times[\rho_1,\rho_2])}$.

Таким образом, априорная оценка в метрике $C^2(S_1^2)$ решения $\rho=\rho(u,v)$ исследуемого исходного уравнения получена.

---

1. Филимонова, А.П., Юрьева, Т.А. Аналог теорем расположения замкнутых выпуклых поверхностей с заданной функцией внутренней кривизны в пространствах постоянной кривизны // Вестник АмГУ. – Вып. 79. – 2017. – С. 17-21.

2. Филимонова, А.П., Юрьева, Т.А. Априорные оценки решения в метрике $C^0\left(S_1^2\right)$ уравнения типа Монжа – Ампера на сфере как двумерном многообразии в пространстве постоянной кривизны // Международный научно-исследовательский журнал. – 2016. – № 9-2(51). – С. 132-136.

3. Филимонова, А.П., Юрьева, Т.А. Свойство выпуклости функции внешней кривизны поверхности в трехмерном пространстве Лобачевского // Вестник АмГУ. – 2015. – Вып. 69. – С. 22-25.

4. Филимонова, А.П., Юрьева, Т.А. Априорные оценки градиента решения уравнения некоторого класса Монжа – Ампера // Вестник Бурятского государственного университета. «Математика, информатика». – 2019. – № 1. – С. 49-55.

5. Бакельман, И.Я. Геометрические методы решения эллиптических уравнений. – М.: Наука, 1965. – 340 с.

6. Трайнин, Я.Л. Аналитическая геометрия в пространстве Лобачевского. – Новосибирск: Наука, 1974. – 285 с.