УДК 514.13

Т.А. Юрьева

ПОСТРОЕНИЕ ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКОГО СЕМЕЙСТВА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА МОНЖА – АМПЕРА НА ЕДИНИЧНОЙ СФЕРЕ КАК ДВУМЕРНОМ МНОГООБРАЗИИ

В статье рассматривается процедура построения однопараметрического семейства дифференциальных уравнений типа Монжа – Ампера, которая является начальным этапом выявления достаточных условий разрешимости общего уравнения типа Монжа – Ампера.

Ключевые слова: уравнения типа Монжа – Ампера, отрицательная эллиптичность, однопараметрическое семейство уравнений, метод продолжения по параметру.

CONSTRUCTION OF A SINGLE-PARAMETRIC FAMILY OF DIFFERENTIAL EQUATIONS OF THE MONGE – AMPER TYPE ON A SINGLE SPHERE AS A TWO-DIMENSIONAL DIVERSITY

The article discusses the procedure for constructing a one-parameter family of differential equations of the Monge –Ampere type, which is the initial stage of identifying sufficient solvability conditions for the general Monge-Ampere type equation.

Key words: equations of Monge – Ampere type, negative ellipticity, one-parameter family of equations, method of continuation by parameter.

К дифференциальным уравнениям Монжа – Ампера на S_1^2 в пространствах постоянной кривизны приводят геометрические задачи восстановления замкнутой выпуклой поверхности с заданными геометрическими характеристиками, – например, внутренней (внешней) кривизной [1, 3].

В аналитическом плане задача восстановления поверхности по ее геометрической характеристике равносильна выявлению достаточных условий существования решения соответствующего дифференциального уравнения.

Теоремы существования решений дифференциальных уравнений часто используют топологические методы.

Первым этапом процесса доказательства разрешимости дифференциального уравнения соответствующей геометрической задачи является ввод уравнения в однопараметрическое семейство уравнений $\Phi_\tau = 0$, $\tau \in [0,1]$, удовлетворяющее некоторым условиям, а затем применение метода продолжения по параметру τ.

Кратко метод можно охарактеризовать следующим образом.

Пусть T – множество значений параметра $\tau \in [0,1]$, для которых $\Phi_\tau = 0$ разрешимо.

Если T не является пустым множеством, T является открытым множеством на $[0,1]$, T является замкнутым множеством на $[0,1]$, то T совпадает с $[0,1]$: $T = [0,1]$. В этом случае становится разрешимым исходное уравнение, так как ему соответствует некоторое значение $\tau \in [0,1]$.

В работе [2] мы рассмотрели уравнение типа Монжа – Ампера на S_1^2 общего вида, явившееся обобщением вышеуказанных геометрических задач:

$$\begin{aligned}&\rho_{11}\rho_{22}-\rho_{12}^2-\rho_{11}[f(\rho)\rho_v^2+\phi(\rho)\cdot 2\rho_{12}\rho_u\rho_v+\rho_{22}\rho_u^2)+\phi(\rho)\cdot\phi_1(u,v)]+\\&+2\rho_{12}\cdot f(\rho)\cdot\rho_u\rho_v-\rho_{22}[f(\rho)\cdot\rho_u^2+\phi(\rho)\cdot\phi_2(u,v)]+D(u,v,\rho,\rho_u,\rho_v)=\\&-\psi(u,v,\rho)\cdot D_1(u,v,\rho,\rho_u,\rho_v).\end{aligned} \qquad (1)$$

В уравнении (1) (u,v) – локальные географические координаты единичной сферы S_1^2, $\rho\in R^+$; ρ_{11}, ρ_{12}, ρ_{22} – ковариантные производные второго порядка функции $\rho=\rho(u,v)$ относительно метрики S_1^2 единичной сферы.

Далее: в [2] показано, что в предположении $f(\rho)>0$, $\phi(\rho)>0$, $\phi_1(u,v)>0$, $\phi_2(u,v)>0$ условием отрицательной эллиптичности уравнения (1) является неравенство: $AC-B^2-D+\psi D_1>0$, $A=f(\rho)\rho_v^2+\phi(\rho)\cdot\phi_1(u,v)$, $B=f(\rho)\rho_u\rho_v$, $C=f(\rho)\cdot\rho_u^2+\phi(\rho)\cdot\phi_2(u,v)$.

Включим уравнение (1) в однопараметрическое семейство уравнений $\Phi_\tau=0$:

$$\begin{aligned}&\rho_{11}\rho_{22}-\rho_{12}^2-\rho_{11}[f(\rho)\rho_v^2+\phi(\rho)\cdot 2\rho_{12}\rho_u\rho_v+\rho_{22}\rho_u^2)+\phi(\rho)\cdot\phi_1(u,v)]+\\&+2\rho_{12}\cdot f(\rho)\cdot\rho_u\rho_v-\rho_{22}[f(\rho)\cdot\rho_u^2+\phi(\rho)\cdot\phi_2(u,v)]+D(u,v,\rho,\rho_u,\rho_v)=\\&=\tau\psi(u,v,\rho)+(1-\tau)\cdot\overline{\psi}(u,v,\rho,\rho_0).\end{aligned} \qquad (2)$$

В уравнении (2) $\tau\in[0,1]$, $\rho_0\in(\rho_1,\rho_2)$, $\overline{\psi}(u,v,\rho,\rho_0)=\dfrac{D(u,v,\rho_0,0,0)}{D_1(u,v,\rho_0,0,0)}$, $\overline{\psi}(u,v,\rho,\rho_0)\Big|_{\rho=\rho_0}=$, $=\psi_0\Big|_{\rho=\rho_0}$, $\psi_0=\dfrac{D(u,v,\rho_0,0,0)}{D_1(u,v,\rho_0,0,0)}$; числа ρ_1 и ρ_2 являются оценками $\rho=\rho(u,v)$ решения уравнения (1) в метрике $C^0(S_1^2)$: $\rho_1\le\rho(u,v)\le\rho_2$. Условия, обеспечивающие эти оценки, следующие: $\psi(u,v,\rho)>\psi_0$ при $\rho<\rho_1$ и $\psi(u,v,\rho)<\psi_0$ при $\rho>\rho_2$ ($\rho_1<\rho_2$).

Уравнение (1) входит в семейство $\Phi_\tau=0$ уравнений (2) при $\tau=1$.

При $\tau=0$ имеем следующее уравнение:

$$\begin{aligned}&\rho_{11}\rho_{22}-\rho_{12}^2-\rho_{11}[f(\rho)\rho_v^2+\phi(\rho)\cdot 2\rho_{12}\rho_u\rho_v+\rho_{22}\rho_u^2)+\phi(\rho)\cdot\phi_1(u,v)]+\\&+2\rho_{12}\cdot f(\rho)\cdot\rho_u\rho_v-\rho_{22}[f(\rho)\cdot\rho_u^2+\phi(\rho)\cdot\phi_2(u,v)]+D(u,v,\rho,\rho_u,\rho_v)=\\&=\frac{D(u,v,\rho_0,0,0)}{D_1(u,v,\rho_0,0,0)}\cdot D_1(u,v,\rho,\rho_u,\rho_v).\end{aligned} \qquad (3)$$

Решением уравнения (3) является функция $\rho=\rho_0=const$. В самом деле, для $\rho=\rho_0$ первые и вторые производные обращаются в нуль: $\rho_u=\rho_v=\rho_{11}=\rho_{12}=\rho_{22}=0$. В результате получаем тождество: $D(u,v,\rho_0,0,0)=\dfrac{D(u,v,\rho_0,0,0)}{D_1(u,v,\rho_0,0,0)}\cdot D_1(u,v,\rho_0,0,0)$.

Таким образом, множество T значений параметра τ, для которых семейство (2) разрешимо, не является пустым. Исходное уравнение (1) входит в $\Phi_\tau=0$ при $\tau=1$ ($\tau\in[0,1]$).

Семейство $\Phi_\tau=0$, т.е. семейство (2), представляет собой совокупность отрицательно эллиптичных уравнений.

При $\tau=1$ исходное уравнение (1) отрицательно эллиптично при $AC-B^2-D+\psi(u,v,\rho)\cdot D_1>0$. При $\tau=0$, как уже показано, решением (2) является $\rho=\rho_0=const$. В этом случае $A=\phi(\rho_0)\cdot\phi_1(u,v)$, $B=0$, $C=\phi(\rho)\cdot\phi_2(u,v)$, $AC-B^2=\phi^2(\rho)\cdot\phi_1(u,v)\cdot\phi_2(u,v)>0$, так как $\phi_1(u,v)>0$, $\varphi_2(u,v)>0$ по условию.

Выражение $AC - B^2 - D + \overline{\psi} D_1 = \varphi^2(\rho)\cdot\varphi_1(u,v)\cdot\varphi_2(u,v) - D(u,v,\rho_0,0,0) +$
$+\dfrac{D(u,v,\rho_0,0,0)}{D_1(u,v,\rho_0,0,0)}\cdot D_1(u,v,\rho_0,0,0) = \phi^2(\rho)\cdot\phi_1(u,v)\cdot\phi_2(u,v) > 0$. Поэтому условие отрицательной эллиптичности выполняется для функции $\overline{\psi}(u,v,\rho_0,0,0)$.

Тогда условие отрицательной эллиптичности выполняется для всех функций $\psi_\tau = \tau\psi(u,v,\rho) + (1-\tau)\overline{\psi}(u,v,\rho,\rho_0)$, так как ψ_τ есть выпуклая комбинация функций $\psi(u,v,\rho)$ и $\overline{\psi}(u,v,\rho,\rho_0)$.

Таким образом, однопараметрическое семейство $\Phi_\tau = 0$ отрицательно эллиптичных уравнений построено.

В частности, для уравнения работы [3]:

$$\rho_{11}\rho_{22} - \rho_{12}^2 - \rho_{11}(2cth\rho\cdot\rho_v^2 + sh\rho\cdot ch\rho) + 2\rho_{12}\rho_u\rho_v cth\rho - \rho_{22}(2cth\rho\cdot\rho_u^2 + sh\rho\cdot ch\rho\cos^2 v) -$$
$$-(\rho_v^2\cos^2 v + \frac{\rho_u^2}{\cos v})^2 + 2\rho_u^2 + 2\rho_v^2\cos^2 v + sh^2\rho\cos^2 v = \tag{4}$$
$$= K_i(u,v,\rho)\frac{(\rho_u^2 + \rho_v^2\cos^2 v + sh^2\rho\cdot\cos^2 v)^2}{\cos v},$$

которое соответствует геометрической задаче восстановления замкнутой выпуклой поверхности в H^3 с заданной функцией внутренней кривизны, семейство $\Phi_\tau = 0$ имеет вид:

$$\rho_{11}\rho_{22} - \rho_{12}^2 - \rho_{11}(2cth\rho\cdot\rho_v^2 + sh\rho\cdot ch\rho) + 2\rho_{12}\rho_u\rho_v cth\rho - \rho_{22}(2cth\rho\cdot\rho_u^2 + sh\rho\cdot ch\rho\cos^2 v) -$$
$$-(\rho_v^2\cos^2 v + \frac{\rho_u^2}{\cos v})^2 + 2\rho_u^2 + 2\rho_v^2\cos^2 v + sh^2\rho\cos^2 v = \tau K_i(u,v,\rho) + (1-\tau)\left(\frac{\rho_0 ch^4\rho_0}{\rho sh^2\rho ch^2\rho} - 1\right).$$

Здесь

$$\overline{\psi}\Big|_{\rho=\rho_0} = \frac{\rho_0\, ch^4\rho_0}{\rho sh^2\rho ch^2\rho} - 1 = \frac{ch^2\rho_0}{sh^2\rho_0} - 1 = \frac{ch^2\rho_0 - sh^2\rho_0}{sh^2\rho_0} = \frac{1}{sh^2\rho_0} = \psi_0\Big|_{\rho=\rho_0},$$
$$\psi_0 = \frac{D(u,v,\rho,0,0)}{D_1(u,v,\rho,0,0)} = \frac{sh^2\rho\cos^2 v}{\frac{1}{\cos^2 v}(sh^2\rho\cos^2 v)^2} = \frac{1}{sh^2\rho}.$$

---

1. Верещагин, Б.М. Восстановление замкнутой выпуклой поверхности по данной функции гауссовой кривизны // Вопросы глобальной геометрии. Сб. научных. трудов ЛГПИ им. А.И. Герцена. – Л., 1979. – С. 7-12.

2. Филимонова, А.П., Юрьева, Т.А. Обобщение задачи восстановления поверхности с заданной гауссовой кривизной в пространстве постоянной кривизны // Вестник АмГУ. – 2016. – Вып. 75. – С. 16-20.

3. Филимонова, А.П. Оценка в метрике C^2 и единственность выпуклой гомеоморфной сфере поверхности с заданной гауссовой кривизной в H^3 // Вопросы глобальной геометрии: Сб. научных трудов ЛГПИ им. А.И. Герцена. – Л., 1979. – С. 64-68.