Математика. Прикладная математика

УДК 519.213

А.Ф. Турбину –
математику и учителю –
посвящаем

В.А. Труфанов, Т.В. Труфанова

ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ *R*-ГАРМОНИЧЕСКОГО СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА $\xi_\lambda(t)$

В статье рассматривается нахождение функции распределения R-гармонического случайного процесса $\xi_\lambda(t)$.

Ключевые слова: случайный процесс, функция распределения, гармоническая функция.

THE DISTRIBUTION FUNCTION OF THE R-HARMONIC RANDOM PROCESS $\xi_\lambda(t)$

The article considers finding the distribution function of an R-harmonic random process $\xi_\lambda(t)$.

Key words: random process, distribution function, harmonic function.

R-гармонический процесс является комбинацией процессов восстановления (renewal process) υ_t и гармонического процесса, определяясь в виде [1]:

$$\xi_\lambda(t) = A_{\nu_t} \cos\left(\omega_{\nu_t} t + \varphi_{\nu_t}\right),$$

где амплитуда A, частота ω и фаза φ – независимые случайные величины с соответствующими функциями распределения $F_A\left(x\right), F_\omega\left(x\right)$, а φ равномерно распределена на $\left[0, 2\pi\right]$.

В качестве процесса восстановления ν_t берется пуассоновский процесс с параметром $\lambda \ge 0$, независимый от случайных величин A, ω и φ.

Для нахождения функции распределения $F_{\xi_\lambda}\left(t, x\right)$ процесса $\xi_\lambda\left(t\right)$ рассмотрим две вспомогательные задачи.

Задача 1. *Пусть* η *– случайная величина со значениями из* $\left[0, \pi\right]$ *и абсолютно непрерывной функцией распределения* $F_\eta\left(x\right)$. *Доказать, что так определяемая функция* $F\left(x\right) = 1 - F_\eta\left(\arccos x\right)$, $x \in \left[-1, 1\right]$ *является функцией распределения некоторой случайной величины, и указать ее вид.*

Решение.

Поскольку $F_\eta\left(x\right) \le 1$, то $F\left(x\right) \ge 0$. Далее рассмотрим значения $F\left(x\right)$ на концах отрезка:

$$F\left(-1\right) = 1 - F_\eta\left(\arccos\left(-1\right)\right) = 1 - F_\eta\left(\pi\right) = 0,$$

так как $F_\eta\left(\pi\right) = 1$;

$$F\left(1\right) = 1 - F_\eta\left(\arccos\left(1\right)\right) = 1 - F_\eta\left(0\right) = 1,$$

где $F_\eta\left(0\right) = 0$ в силу абсолютной непрерывности $F_\eta\left(x\right)$. И, наконец,

$f(x)=\frac{d}{dx}F(x)=\frac{f_\eta(\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}\ge 0,$ т.е. $F(x)$ – неубывающая абсолютно непрерывная функция.

Найдем случайную величину, функцией распределения которой является $F(x)$.

$F(x)=1-P(\eta<\arccos x)=P(\eta\ge\arccos x)=P(\cos\eta<x),$

поскольку на сегменте $[0,\pi]$ функция $\cos\eta$ убывает от 1 до -1.

Решим обратную задачу для случайной величины $\cos\eta$.

Задача 2. *Пусть* η *– случайная величина со значениями из* $[0,2\pi]$ *и абсолютно непрерывной функцией распределения* $F_\eta(x)$. *Найти функцию распределения случайной величины* $\cos\eta$.

На $[0,2\pi]$ функция $\arccos x$ двузначна. Поэтому имеем

$F(x)=P(\cos\eta<x)=P\{\cos\eta<x,\eta\in[0,\pi]\}+P\{\cos\eta<x,\eta\in[\pi,2\pi]\}.$

Рассмотрим каждое слагаемое в отдельности. Обозначим через $F_1(x)$ первое из них и через $F_2(x)$ – второе.

Для первого слагаемого

$F_1(x)=P(\cos\eta<x,\eta\in[0,\pi])=P\{\eta>\arccos x,\eta\in[0,\pi]\}=P(\arccos x<\eta<\pi)=$

$=F_\eta(\pi)-F_\eta(\arccos x).$

Для второго слагаемого

$F_2(x)=P\{\cos\eta<x,\eta\in[\pi,2\pi]\}=P\{-\cos x(\eta-\pi)<x,\eta\in[\pi,2\pi]\}=$

$=P\{\cos(\eta-\pi)>-x,\eta\in[\pi,2\pi]\}=P\{0<\eta-\pi<\arccos(-x)\}=$

$=P\{\pi<\eta<\pi+\arccos(-x)\}=F_\eta(\pi+\arccos(-x))-F_\eta(\pi).$

Таким образом, окончательно получаем

$F(x)=F_1(x)+F_2(x)=F_\eta(\pi)-F_\eta(\arccos x)+F_\eta(\pi+\arccos(-x))-$

$-F_\eta(\pi)=F_\eta(\pi+\arccos(-x))-F_\eta(\arccos x).$

Как и в первой задаче, легко проверить, что

$F(-1)=0,F(1)=F_\eta(2\pi)=1,f(x)=F'(x)\ge 0.$

Сформулируем искомый результат в виде свойства.

Свойство. *Функция распределения процесса* $\xi_\lambda(t)$ имеет вид:

$$F_{\xi_\lambda}(t,x)=F_{\xi_\lambda}(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{|x|\le a}\left\{\pi+\arccos\left(\frac{-x}{a}\right)-\arccos\left(\frac{x}{a}\right)\right\}dF_A(a).$$

Доказательство.

$$F_{\xi_\lambda}(t,x)=P\{\xi_\lambda(t)<x\}=\sum_{n=0}^{\infty}P(\nu_t=n)P\{A_n\cos(\omega_n t+\varphi_n)<x\}=$$

$$=P\{A\cos(\omega t+\varphi)<x\}\sum_{n=0}^{\infty}P(\nu_t=n)=P\{A\cos(\omega t+\varphi)<x\}.$$

Здесь A_n,ω_n,φ_n – независимые между собой и независимые от процесса ν_t случайные величины. Поэтому индексы лишь фиксируют при выполнении пуассоновского события новые значения случайных величин A, ω, φ согласно своим распределениям, отчего индексы можно убрать. Получим, что функция распределения не зависит от процесса ν_t.

Продолжим

$$F_{\xi_\lambda}(t,x) = \int_0^\infty \int_{|x|\le a} P\left\{\omega' t + \varphi < \arccos\frac{x}{a}\right\} dF_A(a)\, dF_\omega(\omega') =$$

$$= \int_0^\infty \int_{|x|\le a} P\left\{\varphi < \arccos\frac{x}{a} - \omega' t\right\} dF_A(a)\, dF_\omega(\omega').$$

Мы пришли к случаю второй задачи для подынтегрального выражения, поэтому используем ее результат. При выводе учтем значение функции плотности $f_\varphi = (2\pi)^{-1}$ для случайной величины φ.

$$F_{\xi_\lambda}(t,x) = \int_0^\infty \int_{|x|\le a} P\left\{\left(\arccos\frac{x}{a} - \omega' t < \varphi < \pi - \omega' t\right) +\right.$$

$$\left. P\left(\pi - \omega' t < \varphi < \pi + \arccos\left(\frac{-x}{a}\right) - \omega' t\right)\right\} dF_A(a)\, dF_\omega(\omega') =$$

$$= \int_0^\infty \int_{|x|\le a} \left\{ \int_{\arccos\frac{x}{a} - \omega' t}^{\pi - \omega' t} f_\varphi(u)\, du + \int_{\pi - \omega' t}^{\pi + \arccos\left(\frac{-x}{a}\right) - \omega' t} f_\varphi(u)\, du \right\} dF_A(a)\, dF_\omega(\omega') =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \int_{|x|\le a} \left(\pi + \arccos\left(\frac{-x}{a}\right) - \omega' t - \arccos\frac{x}{a} + \omega' t\right) dF_A(a)\, dF_\omega(\omega') =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{|x|\le a} \left(\pi + \arccos\left(-\frac{x}{a}\right) - \arccos\frac{x}{a}\right) dF_A(a) = F_{\xi_\lambda}(x).$$

В полученном результате отметим, что функция распределения процесса $\xi_\lambda(t)$ не зависит от времени.

---

1. Турбин, А.Ф., Труфанов, В.А. Свойства *R*–гармонических случайных процессов // Дальневосточный математический сборник. – Владивосток: Дальнаука ДВО РАН, 1997. –Вып. 4. – С. 34-38.