УДК 519.872

Н.Н. Максимова, С.Ю. Тето

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ И ИМИТАЦИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАБОТЫ КАССЫ СУПЕРМАРКЕТА

В статье проводится исследование работы касс супермаркета. Вычисляются предельные характеристики по известным формулам теории СМО в пакете Matlab R2014b. Осуществляется построение и исследование имитационной модели в пакете Anylogic 8.3.2.

Ключевые слова: система массового обслуживания, модель касс супермаркета, имитационное моделирование.

NUMERICAL SOLUTION OF THE BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE BESSEL EQUATION BY THE RITZ METHOD

This article conducts a study of the work of supermarket cash registers. The limiting characteristics are calculated using the well-known formulas of the SMO theory in the Matlab R2014b. The construction and study of the simulation model in the package Anylogic 8.3.2.

Key words: Queuing System, Supermarket Cashier Model, Simulation Modeling.

Введение

Во многих областях практической деятельности человек сталкивается с необходимостью пребывать в состоянии ожидания. Подобные ситуации возникают, например, в очередях в билетных кассах, автозаправочных и телефонных станциях, поликлиниках и т.п. Это системы массового обслуживания (СМО), их изучением занимается теория систем массового обслуживания. Предметом исследования здесь являются вероятностные модели реальных систем обслуживания на основе изучения потоков требований на обслуживание, поступающих в систему и выходящих из нее, длительности ожидания и длины очередей [1]. В теории массового обслуживания используются методы теории вероятностей и математической статистики.

Каждая СМО состоит из какого-либо числа обслуживающих единиц, не всегда способных немедленно удовлетворить все заявки. Образуется очередь. Поэтому появляется задача – установить взаимную зависимость между числом обслуживающих единиц и качеством обслуживания. Качество обслуживания определяется различными параметрами: это процент обслуженных заявок или заявок, получивших отказ, среднее число занятых каналов, среднее время обслуживания, вероятность того, что число заявок в очереди превысит какое-то значение [2].

Моделируя реальные процессы, можно прогнозировать качество работы системы. Изменяя параметры системы, пользователь может проследить, как изменяется эффективность работы. Вычислительные эксперименты позволяют сделать выводы о значениях параметров, при которых система будет работать максимально эффективно.

Математическое моделирование СМО предполагает создание системы дифференциальных уравнений для вычисления предельных вероятностей нахождения системы в различных состояниях. Однако для моделей сложных систем возникают трудности при учете всех возможных параметров, влияющих на характеристики системы. Полученные системы могут оказаться весьма громоздкими.

Тогда на помощь приходит имитационное моделирование СМО. Имитационные модели широко применяются как для больших систем, так и систем частного характера.

В настоящее время существует множество пакетов для построения и исследования имитационных моделей. Пакет AnyLogic – профессиональный инструмент нового поколения, предназначенный для разработки и исследования имитационных моделей. Он был разработан на основе новых идей в области информационных технологий, теории параллельных взаимодействующих процессов и теории гибридных систем [3-5].

В представленной работе проводится исследование касс супермаркета. Для упрощенной модели вычисляются предельные характеристики по известным формулам теории СМО в пакете Matlab R2014b. Далее осуществляются построение и исследование имитационной модели в пакете Anylogic 8.3.2.

Вычисление предельных характеристик работы супермаркета

Рассмотрим супермаркет как многоканальную систему массового обслуживания и предположим, что очередь может неограниченно расти.

Пусть имеется n касс. Введем обозначения состояний: S_0 – все кассы свободны; S_1 – занята одна касса; … 7 – заняты все n касс; S_{n+1} – заняты все n касс и один человек в очереди; S_{n+2} – заняты все n касс и два человека в очереди и т.д.

Обозначим параметры системы: λ – интенсивность прибытия покупателей (человек в минуту); $t_{об}$ – время обслуживания одного покупателя (минут); $\mu = 1/t_{об}$ – интенсивность обслуживания (человек в минуту).

Будем считать, что $\rho / n < 1$, где $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$; в противном случае система не является устойчивой (очередь неограниченно растет).

Будем рассчитывать характеристики состояния системы по известным формулам [1, 2].

Положим следующие значения параметров системы: интенсивность прибытия покупателей – $\lambda = 1$, $\lambda = 1{,}5$ и $\lambda = 2$ человека в минуту, время обслуживания одного покупателя – $t_{об} = 1$ минута, откуда интенсивность обслуживания $\mu = 1/t_{об} = 1$ человек в минуту. Количество кассиров будем варьировать от 1 до 4. Получим данные, приведенные в табл. 1-3.

Таблица 1

Характеристики работы супермаркета при $\lambda = 1$

Параметры системы	Количество кассиров			
	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$
Среднее число занятых кассиров $\overline{k}$	система неустойчива	1	1	1
Среднее число покупателей в очереди (длина очереди) $L_{оч}$, чел.		0,333	0,046	0,068
Среднее время нахождения покупателя в очереди $\overline{T}_{оч}$, мин.		0,333	0,046	0,068

Таблица 2

Характеристики работы супермаркета при $\lambda = 1{,}5$

Параметры системы	Количество кассиров			
	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$
Среднее число занятых кассиров $\overline{k}$	система неустойчива	1,5	1,5	1,5
Среднее число покупателей в очереди (длина очереди) $L_{оч}$, чел.		1,929	0,237	0,045
Среднее время нахождения покупателя в очереди $\overline{T}_{оч}$, мин.		1,286	0,158	0,030

Таблица 3

Характеристики работы супермаркета при $\lambda = 2$

Параметры системы	Количество кассиров			
	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$
Среднее число занятых кассиров $\overline{k}$	система неустойчива	система устойчива	2	2
Среднее число покупателей в очереди (длина очереди) $L_{оч}$, чел.			0,889	0,174
Среднее время нахождения покупателя в очереди $\overline{T}_{оч}$, мин.			0,444	0,087

Анализируя полученные данные, устанавливаем, что независимо от количества касс среднее число занятых кассиров всегда составляет 1, 1,5 и 2 соответственно (при заданных значениях параметров совпадает с интенсивностью прибытия покупателей), а при увеличении числа касс длина очереди и время нахождения в очереди становятся меньше. Тем самым при заданных параметрах и различных интенсивностях λ оптимальным является число касс, равное двум.

Зафиксируем значение интенсивности прихода покупателей, равное $\lambda = 1{,}5$. Определим максимально возможное значение времени обслуживания покупателя $t_{макс}$ из требования устойчивости системы $\rho / n < 1$, где $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu} = \lambda \cdot t_{об}$. Имеем $\lambda \cdot t_{макс} / n < 1$, откуда $t_{макс} < n / \lambda$. Проведем вычисления тех же характеристик, что представлены в табл. 2, при количестве кассиров 2, 3 и 4 и времени обслуживания покупателей от 0,5 мин. до максимально возможного. Результаты вычислений представлены на рис. 1, 2 и 3.

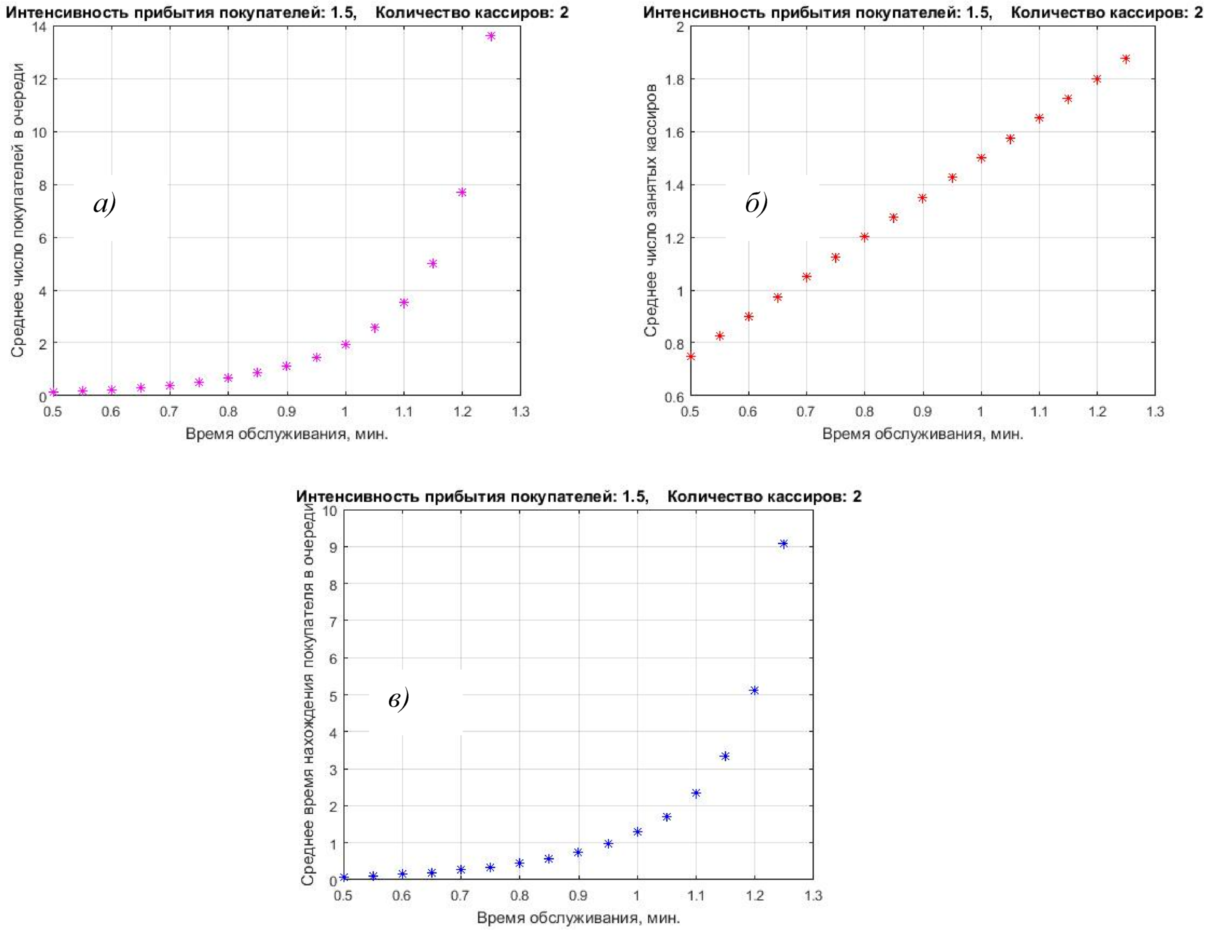

Рис. 1. Результаты вычислений при $\lambda = 1{,}5$ и $n = 2$:
а – среднее число занятых каналов; *б* – среднее число покупателей в очереди; *в* – среднее время нахождения покупателя в очереди.

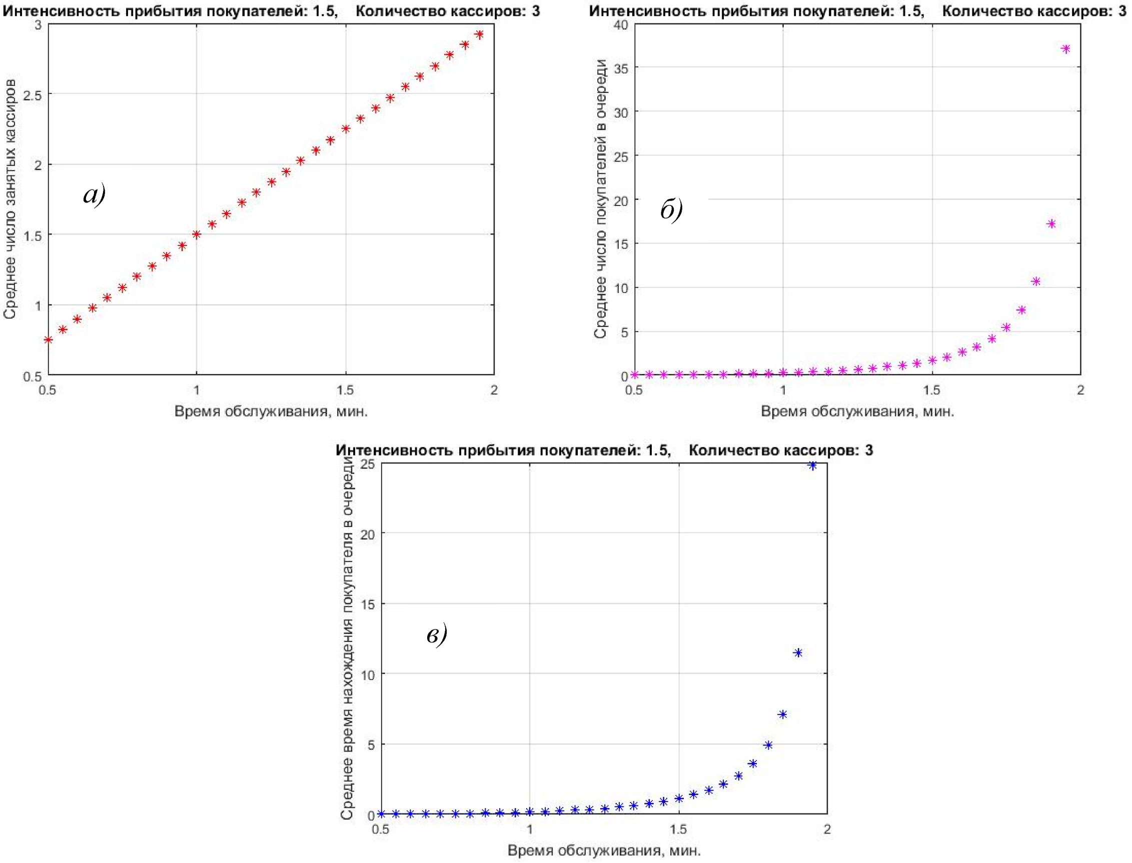

Рис. 2. Результаты вычислений при $\lambda = 1{,}5$ и $n = 3$:

а – среднее число занятых каналов; *б* – среднее число покупателей в очереди; *в* – среднее время нахождения покупателя в очереди.

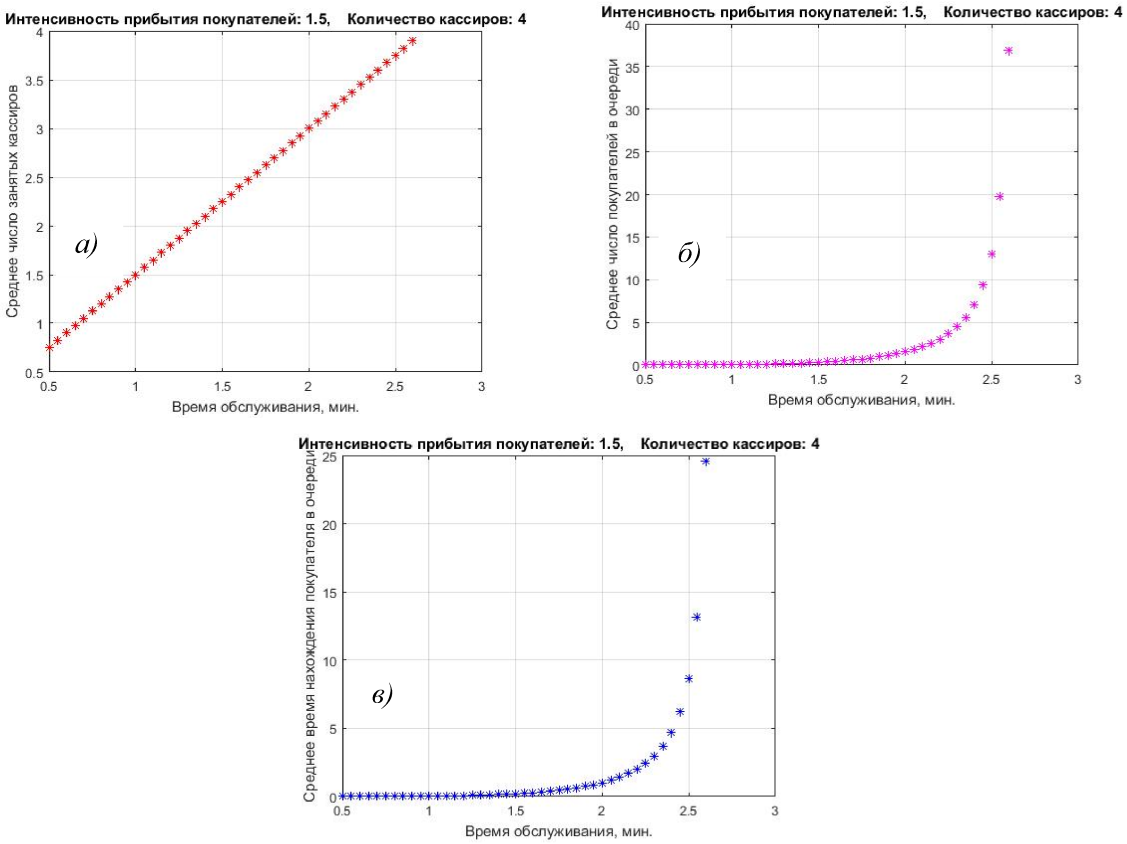

Рис. 3. Результаты вычислений при $\lambda = 1{,}5$ и $n = 4$:

а – среднее число занятых каналов; *б* – среднее число покупателей в очереди; *в* – среднее время нахождения покупателя в очереди.

Анализируя результаты вычислений, видим, что при количестве кассиров $n = 2$ время обслуживания одного покупателя до $t_{об} = 1,2$ мин., при количестве кассиров $n = 3$ – до $t_{об} = 1,8$ мин., при количестве кассиров $n = 4$ – до $t_{об} = 2,5$ мин.

Разумеется, полученные данные являются усредненными по времени и могут отличаться от реальных. Наиболее интересным и полезным с практической точки зрения может оказаться создание имитационной модели работы касс супермаркета.

Имитационная модель супермаркета

Из преимуществ построения в пакете AnyLogic имитационной модели касс супермаркета нужно выделить следующие:

можно варьировать значения параметров системы, определяя их значения из определенного промежутка и определяя закон распределения (в имитационной модели значение времени обслуживания покупателей кассиром варьируется от 0,5 до 5 мин., с наиболее частым значением 1 мин.);

можно добавлять различные блоки (в имитационную модель между блоком прибытия и блоком обслуживания на кассе был добавлен блок пребывания покупателей в магазине со временем пребывания от 5 до 60 мин., с наиболее частым значением 20 мин.);

можно отследить значения характеристик работы системы, построив график изменения за определенный промежуток времени;

можно создать трехмерную модель супермаркета.

Пакет AnyLogic позволяет собирать статистические данные построенной имитационной модели и на основании этих данных строить временные графики, столбиковые диаграммы, гистограммы и др.

Рассмотрим имитационную модель касс супермаркета [6]. При создании использовались следующие элементы из Библиотеки моделирования процессов:

source (enter) создает агентов, т.е. посетителей магазина. Основной характеристикой элемента является интенсивность прибытия посетителей. Для данного эксперимента будем считать ее равной 1,5 чел./мин.;

delay (shopping) задерживает агентов на заданный период времени, элемент отвечает за время совершения покупки посетителем. Используется функция треугольного распределения с заданными параметрами *triangular (5, 20, 60)* в минутах;

service (queue) захватывает для агента нужное количество ресурсов, задерживает агента на заданное время, затем освобождает ресурс В нашей модели элемент создает два состояния покупателей – обслуживание на кассе и очередь к кассе. Количество ресурсов ставим: 1 – один кассир обслуживает одного клиента. А время обслуживания задаем также по функции *triangular(0.5, 1, 5)*. Отмечаем *максимальную вместимость*, так ккак очередь не ограничиваем;

resourcePool (cashiers) задает набор ресурсов определенного типа, т.е. создает кассиров. В поле *количество* ресурсов укажем 4;

sink (exit) уничтожает поступивших агентов – посетители покидают магазин.

Ограничим время действия модели 12 часами работы. Для этого в свойствах простого эксперимента в режиме выполнения выберем реальное время со скоростью 1, начальное время укажем 0, а конечное – 720 мин. Блок-схема работающей модели изображена на рис. 4.

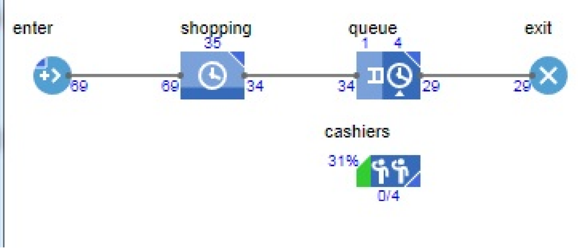

Рис.4. Работающая модель кассы супермаркета.

Цифры возле соответствующих элементов показывают, сколько человек вошло в магазин (*enter* − 69), сколько выбирают покупку (*shopping* − 35), сколько стоит в очереди (*queue* − 1), сколько обслуживается на данный момент кассирами (*queue* − 4), сколько кассиров занято обслуживанием (*cashiers* − 4) и сколько человек уже вышло из магазина с покупками (exit − 29). Запись *0/4* у элемента *cashiers* означает, что 0 кассиров из 4 свободны. Эти данные приведены на рис. 4.

Одним из преимуществ программы AnyLogic является наглядное представление действия модели в двумерной (2D) и трехмерной (3D) графике. Для созданной имитационной модели была использована соответствующая трехмерная модель (рис. 5).

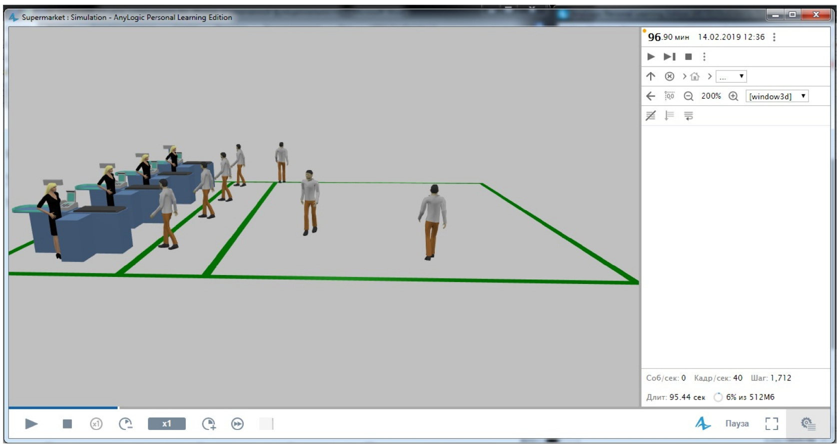

Рис. 5. Трехмерное изображение модели.

Показатели блок-схемы дают данные в текущий момент модельного времени, но можно узнать и усредненные значения показателей. Для сбора статистических данных в программе AnyLogic встроена палитра *Статистика.*

При запуске модели видим результаты сбора статистических данных. Это количество измерений, минимальное, максимальное и среднее значения. В конце эксперимента мы видим, что очередь не создается (0,313) и среднее число занятых кассиров составляет 3,264. Результаты сбора статистики представлены на рис. 6.

Выведем полученные данные на графике. Результат сбора статистических данных по средней длине очереди – на рис. 7. Видно, что за время работы магазина в течение 720 мин. (12 часов) очередь не создается, т.е. практически равна нулю.

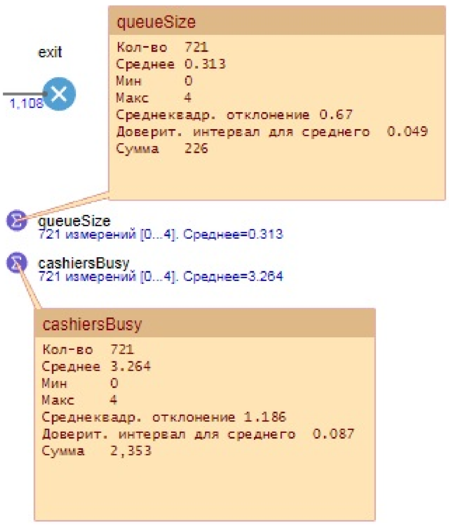

Рис. 6. Среднее число занятых кассиров и длина очереди.

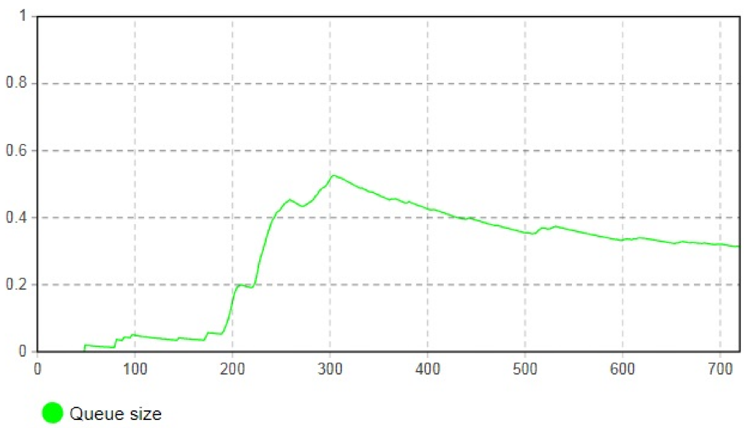

Рис. 7. График средней длины очереди.

Продолжение табл. 4

1	2	3	4	5
Интенсивность λ =1,5 чел./мин.				
Среднее число занятых кассиров	0,975	1,911	2,857	3,264
Среднее число покупателей в очереди (длина очереди), чел.	86,119	49,049	11,799	0,313
Среднее время нахождения покупателя в очереди, мин.	237,918	131,835	33,114	1,344
Среднее время обслуживания	2,118	2,139	2,168	2,118
Интенсивность λ =2 чел./мин.				
Среднее число занятых кассиров	0,976	1,913	2,915	3,793
Среднее число покупателей в очереди (длина очереди), чел.	129,775	88,750	51,036	16,085
Среднее время нахождения покупателя в очереди, мин.	257,041	182,778	99,568	34,059
Среднее время обслуживания	2,178	2,260	2,176	2,167

Из табл. 4 видно, что при интенсивности λ=1 чел./мин. оптимальное количество касс равно трем (при n = 2 слишком велико время нахождения покупателей в очереди), при интенсивности λ=1.5 чел./мин. – четырем (при n = 3 велико и время нахождения покупателей в очереди, и количество покупателей в очереди), а при интенсивности 2 чел./мин. 4 кассиров недостаточно.

Заключение

Результаты работы имитационной модели отличаются от итогов вычислений по формулам расчета предельных вероятностей. Это обусловлено следующими факторами:

1) в имитационной модели кассы супермаркета присутствует блок пребывания покупателей в магазине;

2) в имитационной модели время обслуживания покупателей кассиром не является величиной постоянной, а варьирует в определенных пределах по определенному закону.

Эти факторы указывают на преимущество использования имитационных моделей при исследовании реальных систем массового обслуживания.

1. Шапкин, А.С. Математические методы и модели исследования операций. Учебник / А.С. Шапкин, В.А. Шапкин. − Изд. 6-е. − М.: Дашков и Ко, 2016. − 400 с.

2. Вентцель, Е.С. Исследование операций. Задачи, принципы, методология. Учебное пособие для вузов. – М.: Дрофа, 2006. – 206 с.

3. Григорьев, И. AnyLogic три дня. Практическое пособие по имитационному моделированию. 2017. – 273 с. − Режим доступа: https://www.anylogic.ru/resources/books/free-simulation-book-and-modeling-tutorials.

4. Лимановская, О.В. Имитационное моделирование в AnyLogic 7: В 2 ч. – Ч. 1: учебное пособие – Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 2017. – 152 с.

5. Лимановская, О.В. Имитационное моделирование в AnyLogic 7: В 2 ч. – Ч. 2: лабораторный практикум. – Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 2017. – 104 с.

6. Калугин, А.И. Оптимизационный эксперимент в среде Anylogic // Наука и школа. – 2015. − № 4. – С. 168-173.

7. Киселева, М.В. Имитационное моделирование систем в среде AnyLogic. Учебно-методическое пособие. – Екатеринбург: УГТУ. – УПИ, 2009. – 88 с.

На рис. 8 представлены столбиковая диаграмма и временной график занятого числа кассиров. Эти графики показывают количество занятых кассиров на данный момент времени, т.е. в динамике.

К концу эксперимента мы получаем следующие данные (рис. 9): среднее время ожидания в очереди – 1,344 мин. (минимальное значение – 0, максимальное – 8,462 мин.); среднее время обслуживания 2,118 мин. (минимальное значение – 0,553 мин., максимальное – 4,946 мин.).

Рис. 8. Столбиковая диаграмма и временной график занятого числа кассиров.

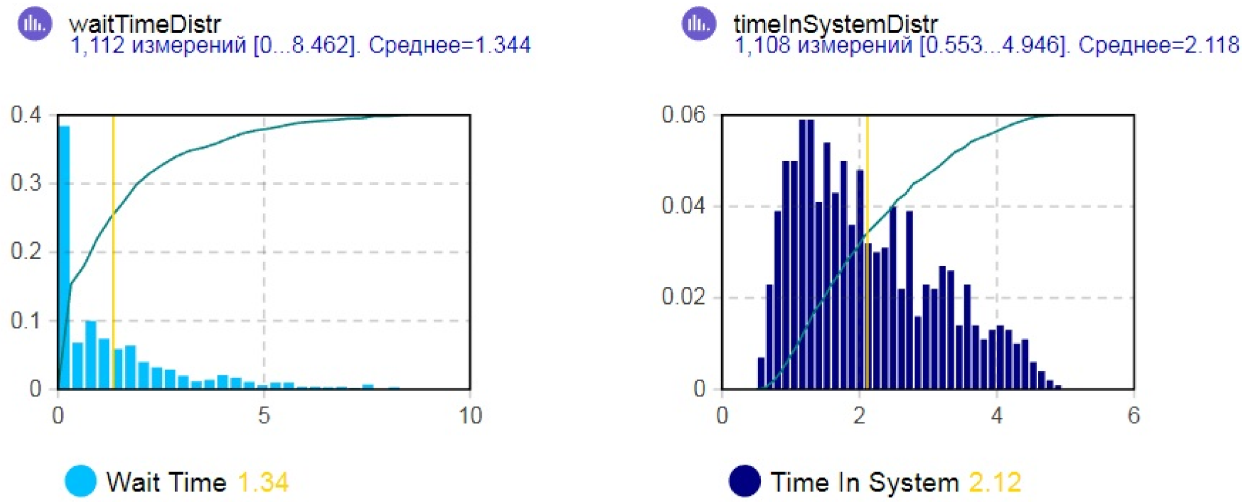

Рис. 9. Данные гистограммы.

Будем изменять параметры системы – от 1 до 4 количество кассиров и интенсивность прибытия покупателей. Значения интенсивность фиксированные – 1, 1.5 и 2 человека в минуту (для удобства подсчета и возможности сравнить с аналитическими результатами). Результаты при изменении параметров представлены в табл. 4.

Таблица 4

Результаты статистических данных при изменении параметров

Параметры системы	Количество кассиров			
	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$
1	2	3	4	5
Интенсивность λ =1 чел./мин.				
Среднее число занятых кассиров	0,969	1,875	2,064	2,039
Среднее число покупателей в очереди (длина очереди), чел.	40,969	8,749	0,121	0,011
Среднее время нахождения покупателя в очереди, мин.	165,997	37,184	1,055	0,183
Среднее время обслуживания	2,188	2,136	2,233	2,123