УДК 519.6

Н.Н. Максимова, Н.П. Шкарлет

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ БЕССЕЛЯ МЕТОДОМ РИТЦА

В статье приводится численное исследование краевой задачи для дифференциального уравнения Бесселя вариационным методом Ритца, сравниваются приближенное и аналитическое решения.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение Бесселя, краевая задача, вариационные методы, метод Ритца.

NUMERICAL SOLUTION OF THE BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE BESSEL EQUATION BY THE RITZ METHOD

In this article, a numerical study of the boundary value problem for the Bessel differential equation by the variational Ritz method is considered, and the approximate and analytical solutions are compared.

Key words: The Bessel Differential Equation, Boundary Value Problem, Variational Methods, The Ritz Method.

Введение

Уравнение Бесселя возникает при решении задач математической физики для круглых и цилиндрических тел методом разделения переменных в цилиндрических и полярных координатах (задачи о колебании круглой мембраны, о стационарной температуре круглого цилиндра, об остывании бесконечного круглого стержня и др.). Любое нетривиальное решение уравнения Бесселя называется цилиндрической функцией. Частными примерами цилиндрических функций являются функции Бесселя и Неймана, а также функция Ханкеля первого и второго рода [1, 2].

Уравнение Бесселя представляет собой линейное дифференциальное уравнение второго порядка, а для такого типа уравнений известен алгоритм перехода к эквивалентной вариационной постановке – задаче поиска экстремума некоторого функционала [3]. Для однозначного решения вариационной задачи необходимо наличие граничных условий.

Для приближенного решения вариационных задач можно использовать прямые методы, сводящие исходные задачи непосредственно к конечным системам алгебраических уравнений [3-5].

В работе представлено численное решение краевой задачи для дифференциального уравнения Бесселя прямым методом Ритца.

Постановка задачи. Сведение краевой задачи к вариационной

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$x^2 y_{xx} + x y_x + (x^2 - 1) y = 0 \qquad (1)$$

с заданными граничными

$$y(1) = 2, y(2) = 4. \qquad (2)$$

Точное решение уравнения (1) с заданными граничными условиями (2) имеет вид:

$y(x)=7,2144\cdot J_1(x)+1,5039\cdot N_1(x).$

Это уравнения Бесселя с неоднородными граничными условиями. Для упрощения расчетов сведем неоднородные граничные условия к однородным с помощью следующей замены: $y(x)=z(x)+(ax+b)$. Подставляя данную замену в граничные условия, получим коэффициенты:

$$\begin{cases} y(1)=z(1)+a+b \\ y(2)=z(2)+2a+b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=0 \\ a=2 \end{cases} \tag{3}$$

Тем самым решение принимает вид $y(x)=z(x)+2x$. Далее преобразуем исходное уравнение (1):

$$x^2 z_{xx}+x(z_x+2)+(x^2-1)(z+2x)=0,$$

$$x^2 z_{xx}+xz_x+2x+x^2 z-z+2x^3-2x=0.$$

Окончательно получаем следующее дифференциальное уравнение

$$xz_{xx}+z_x+\frac{x^2-1}{x}z+2x^2=0 \tag{4}$$

с однородными граничными условиями

$$z(1)=0, z(2)=0. \tag{5}$$

Сведем линейную краевую задачу (4)-(5) к вариационной постановке, используя процедуру, представленную в [3]. Пусть краевая задача для обыкновенного дифференциального уравнения имеет вид:

$$y_{xx}=p(x)y_x+q(x)y+r(x),\ y(a)=y_a,\ y(b)=y_b. \tag{6}$$

Представим краевую задачу (6) в стандартной форме:

$$-\frac{d}{dx}\left(P(x)\frac{dy}{dx}\right)=Q(x)y+R(x),\ y(a)=y_a,\ y(b)=y_b. \tag{7}$$

Здесь $P(x)=e^{-\int_a^x p(t)dt}$, $Q(x)=-P(x)q(x)$, $R(x)=-P(x)q(x)$. Получим ункционал вида:

$$I(y)=\frac{1}{2}\int_a^b\left(-P(x)y_x^2+Q(x)y^2+2R(x)y\right)dx. \tag{8}$$

Применим вышеизложенную процедуру к уравнению (4):

$$z_{xx}=-\frac{1}{x}z_x-\frac{x^2-1}{x^2}z-2x,$$

$$p(x)=-\frac{1}{x},\ q(x)=-\frac{x^2-1}{x^2},\ r(x)=-2x.$$

$$P(x)=e^{-\int_1^x p(t)dt}=e^{-\int_1^x\left(-\frac{1}{t}\right)dt}=e^{\ln x-\ln 1}=e^{\ln x}=x.$$

$$Q(x)=-x\cdot\left(-\frac{x^2-1}{x^2}\right)=\frac{x^2-1}{x},\ R(x)=-x\cdot(-2x)=2x^2.$$

Получаем $I_1(z)=\frac{1}{2}\int_1^2\left(-x\cdot z_x^2+\left(\frac{x^2-1}{x}\right)\cdot z^2+4x^2 z\right)dx,$ или

$$I_1(z)=\int_1^2\left(x\cdot z_x^2-\left(\frac{x^2-1}{x}\right)\cdot z^2-4x^2 z\right)dx. \tag{9}$$

Рассмотрим задачу определения экстремума интегрального функционала (9) при граничных условиях (5).

Численное решение задачи методом Ритца

Согласно алгоритму метода Ритца решение задачи будем искать в виде:

$$\tilde{z}_n(x)=\sum_{i=1}^{n}C_i\varphi_i(x)=\sum_{i=1}^{n}C_i(x-1)(2-x)x^i=(x-1)(2-x)\sum_{i=1}^{n}C_ix^i. \qquad (10)$$

Выбор базисных функций $\varphi_i(x)=(x-1)(2-x)x^i$ объясняется нулевыми граничными условиями: $\varphi_i(1)=\varphi_i(2)=0$.

При $n=0$ $\tilde{z}_0(x)=C_0\left(x-1\right)\left(2-x\right)$ подставляем в искомый интеграл и дифференцируем по C_0:

$$\frac{\partial\tilde{I}_1}{\partial C_0}=\frac{\partial}{\partial C_0}\cdot\int_0^1\left[x\cdot\left(C_0\left(x-1\right)\left(2-x\right)\right)_x^2-\left(\frac{x^2-1}{x}\right)\cdot\left(C_0\left(x-1\right)\left(2-x\right)\right)^2-4x^2\cdot\left(C_0\left(x-1\right)\left(2-x\right)\right)\right]dx=$$

$$=\int_0^1\left[x\cdot C_0^2\left(3-2x\right)^2-\left(\frac{x^2-1}{x}\right)\cdot C_0^2\left(x-1\right)^2\left(2-x\right)^2-4x^2\cdot\left(C_0\left(x-1\right)\left(2-x\right)\right)\right]dx=$$

$$=\int_0^1\left[-x\cdot C_0\left(3-2x\right)^2+\left(\frac{x^2-1}{x}\right)\cdot\left(x-1\right)^2\left(2-x\right)^2\cdot C_0+2x^2\cdot\left(x-1\right)\cdot\left(2-x\right)\right]dx=0.$$

Вычисляя интегралы (с использованием ППП MATHCAD), получим $C_0=1,662$. Подставляя $C_0=1,662$ в $\tilde{z}_0(x)=C_0\left(x-1\right)\left(2-x\right)$, получим приближенное решение $\tilde{z}_0(x)=1,662\cdot\left(x-1\right)\left(2-x\right)$.

При $n=1$ $\tilde{z}_1(x)=C_0\left(x-1\right)\left(2-x\right)+C_1x\left(x-1\right)\left(2-x\right)$ подставляем в искомый интеграл и дифференцируем по C_0, C_1:

$$\frac{\partial\tilde{I}_1}{\partial C_0}=\frac{\partial}{\partial C_0}\cdot\int_0^1\left[x\cdot\left(C_0\left(x-1\right)\left(2-x\right)+C_1x\cdot\left(x-1\right)\left(2-x\right)\right)_x^2-\right.$$

$$-\left(\frac{x^2-1}{x}\right)\cdot\left(C_0\left(x-1\right)\left(2-x\right)+C_1x\cdot\left(x-1\right)\left(2-x\right)\right)^2-$$

$$\left.-4x^2\cdot\left(C_0\left(x-1\right)\left(2-x\right)+C_1x\cdot\left(x-1\right)\left(2-x\right)\right)\right]dx=$$

$$=\int_0^1\left[x\cdot\left(C_0\left(3-2x\right)+C_1\left(-3x^2+6x-2\right)\right)^2-\right.$$

$$-\left(\frac{x^2-1}{x}\right)\cdot\left(C_0\left(-x^2+3x-2\right)+C_1\left(-x^3+3x^2-2x\right)\right)^2-$$

$$\left.-4x^2\cdot\left(C_0\left(x-1\right)\left(2-x\right)+C_1x\cdot\left(x-1\right)\left(2-x\right)\right)\right]dx=$$

$$=\int_0^1\left[2x\cdot\left(C_0\cdot\left(2x-3\right)+C_1\left(3x^2-6x+2\right)\right)\cdot\left(2x-3\right)+4x^2\cdot\left(x-1\right)\left(x-2\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{2\left(x-1\right)\left(x-2\right)\cdot\left(C_0\cdot\left(x-1\right)\left(x-2\right)+C_1x\cdot\left(x-1\right)\left(x-2\right)\right)\cdot\left(x^2-1\right)}{x}\right]dx=0,$$

$$\frac{\partial\tilde{I}_1}{\partial C_1}=\frac{\partial}{\partial C_1}\cdot\int_0^1\left[x\cdot\left(C_0\left(x-1\right)\left(2-x\right)+C_1x\cdot\left(x-1\right)\left(2-x\right)\right)_x^2-\right.$$

$$-\left(\frac{x^2-1}{x}\right)\cdot\left(C_0\left(x-1\right)\left(2-x\right)+C_1x\cdot\left(x-1\right)\left(2-x\right)\right)^2-$$

$$-4x^2\cdot\left(C_0\left(x-1\right)\left(2-x\right)+C_1x\cdot\left(x-1\right)\left(2-x\right)\right)\Big]dx=$$

$$=\int_0^1\Big[x\cdot\left(C_0\left(3-2x\right)+C_1\left(-3x^2+6x-2\right)\right)^2-$$

$$-\left(\frac{x^2-1}{x}\right)\cdot\left(C_0\left(-x^2+3x-2\right)+C_1\left(-x^3+3x^2-2x\right)\right)^2-$$

$$-4x^2\cdot\left(C_0\left(x-1\right)\left(2-x\right)+C_1x\cdot\left(x-1\right)\left(2-x\right)\right)\Big]dx=$$

$$=\int_0^1\Big[x\cdot\left(C_0\left(3-2x\right)+C_1\left(-3x^2+6x-2\right)\right)^2-$$

$$=\int_0^1\Big[2x\cdot\left(C_0\cdot\left(2x-3\right)+C_1\left(3x^2-6x+2\right)\right)\cdot\left(3x^2-6x+2\right)+4x^3\cdot\left(x-1\right)\left(x-2\right)-$$

$$-2\left(x-1\right)\left(x-2\right)\cdot\left(C_0\cdot\left(x-1\right)\left(x-2\right)+C_1x\cdot\left(x-1\right)\left(x-2\right)\right)\cdot\left(x^2-1\right)\Big]dx=0.$$

Вычисляя интегралы, получим систему:

$$\begin{cases}-3{,}1884C_0+1{,}4809C_1=1{,}53\\ 1{,}4809C_0+2{,}4642C_1=2{,}4\end{cases}$$

Найдя решение системы, получим $C_0=1{,}6495; C_1=0{,}0174.$

Тогда приближенное решение примет вид:

$\tilde{z}_1(x)=1{,}6495\left(x-1\right)\left(2-x\right)-0{,}0174x\left(x-1\right)\left(2-x\right).$

Построим также графики точного и приближенных решений (рис. 1).

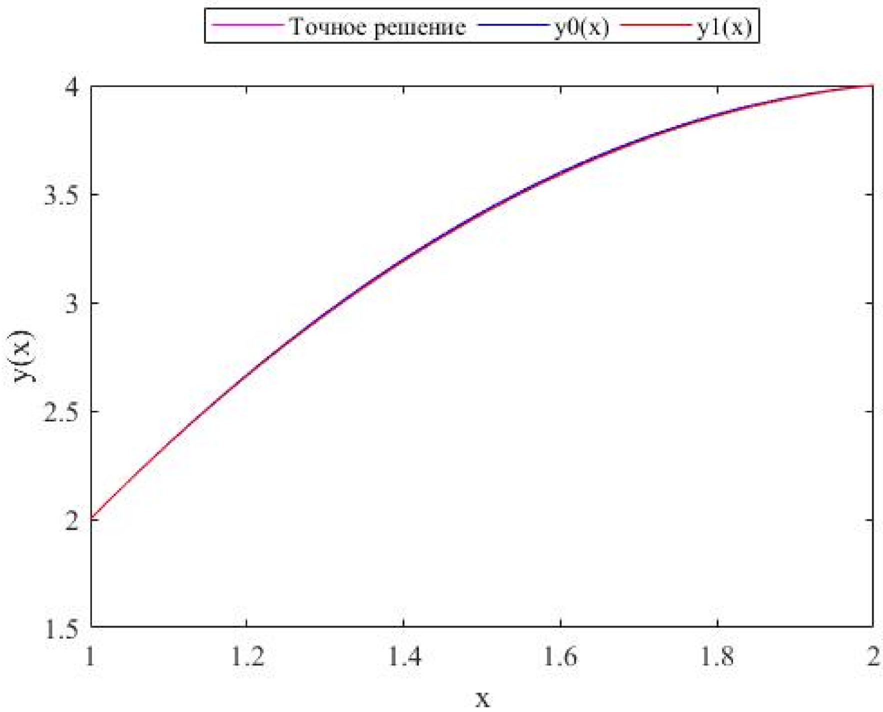

Рис. 1. Графики точного и приближенных решений краевой задачи.

Поскольку на графике не видно, насколько сильно различаются решения, результаты сравнения точного решения с приближенным приведены в таблице.

Построим также графики абсолютной и относительной погрешности каждого решения (рис. 2-5). Построение графиков решений проведено в ППП MATLAB.

Сравнение точного и приближенных решений

X	$y(x)$	$y_0(x)$	$y_1(x)$
1	2,00021	2,00000	2,00000
1.1	2,34739	2,34958	2,34674
1.2	2,66086	2,66592	2,66059
1.3	2,94103	2,94902	2,94165
1.4	3,18896	3,19888	3,19004
1.5	3,40486	3,41550	3,40586
1.6	3,58873	3,59888	3,58921
1.7	3,74032	3,74902	3,74019
1.8	3,85875	3,86592	3,85892
1.9	3,94577	3,94958	3,94548
2	3,99963	4,00000	4,00000

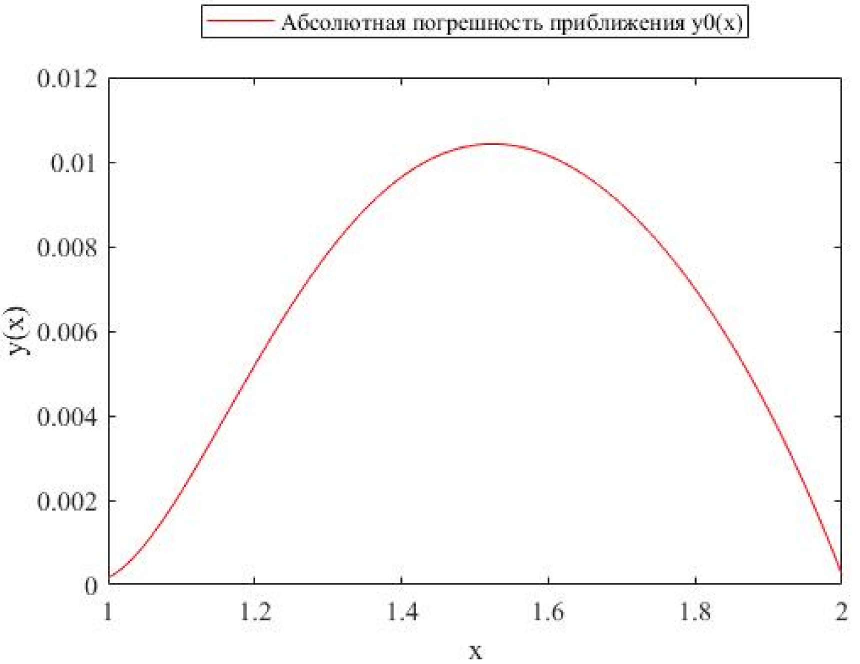

Рис. 2. Абсолютная погрешность приближения $y_0(x)$.

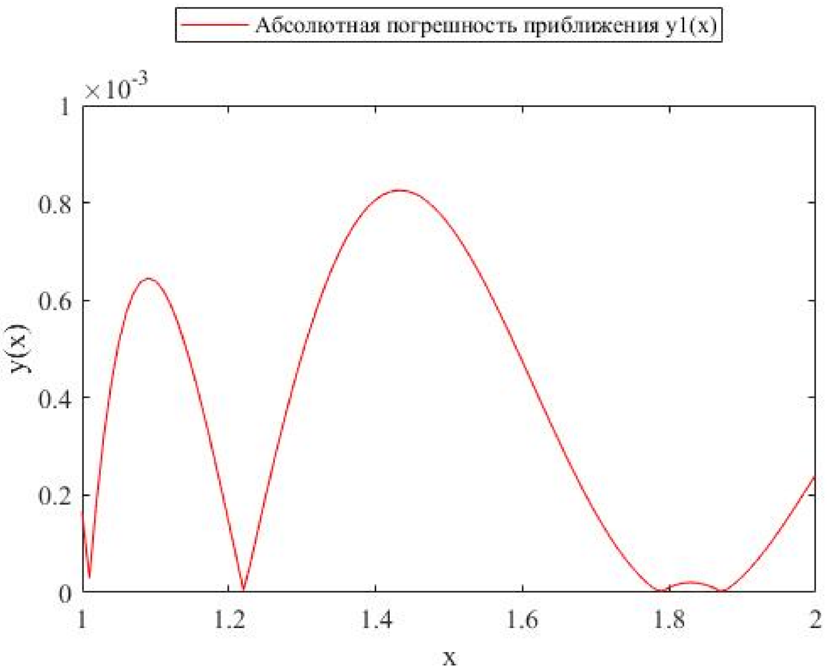

Рис. 3. Абсолютная погрешность приближения $y_1(x)$.

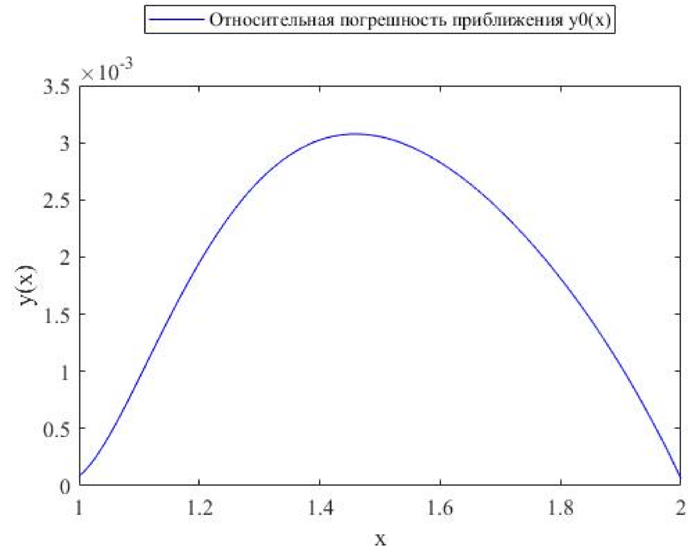

Рис. 4. Относительная погрешность приближения $y_0(x)$.

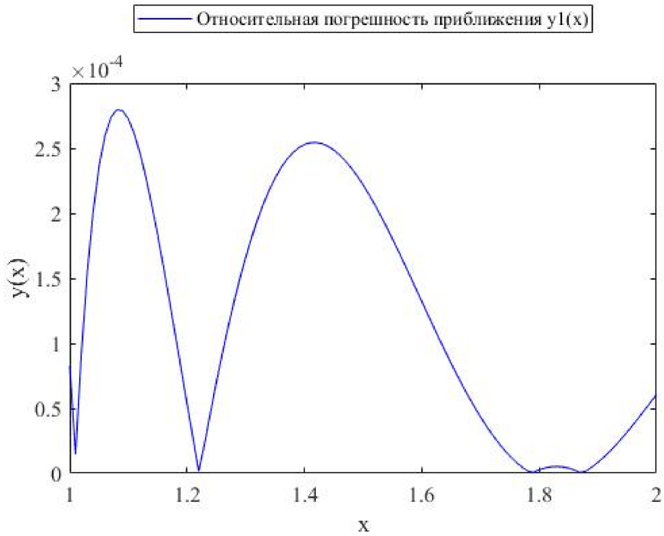

Рис. 5. Относительная погрешность приближения $y_1(x)$.

Из рис. 1-5 и таблицы видно, что первое приближение $y_1(x)$ дает лучшее решение в сравнении с нулевым приближением $y_0(x)$. Расчеты показывают, что относительная погрешность первого приближения на порядок ниже относительной погрешности нулевого приближения. Однако и нулевое приближение оказывается довольно-таки близким к точному решению.

Заключение

В работе представлено численное решение краевой задачи для дифференциального уравнения Бесселя методом Ритца. Использование данного метода становится возможным после сведение краевой задаче к эквивалентной вариационной постановке.

1. Гаврилов, В.С. Функции Бесселя в задачах математической физики. Учебно-методическое пособие / В.С. Гаврилов, Н.А. Денисова, А.В. Калинин. – Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского гос. ун-та, 2014. – 40 с.
2. Краснов, М.Л. Вся высшая математика. Учебник. – Т. 3. – М.: Эдиториал УРСС, 2001. – 240 с.
3. Краснов, М.Л. Вся высшая математика. Учебник. – Т. 6. – М.: Эдиториал УРСС, 2003. – 256 с.
4. Тихонов, Н.А. Основы математического моделирования. – Ч. 2. Учебное пособие / Н.А. Тихонов, М.Г. Токмачев. – М.: Физический факультет МГУ, 2012. – 91 с.
5. Шехтер, Р.С. Вариационный метод в инженерных расчетах. – М.: Мир, 1971. – 292 с.