5. Панагиотопулос, П. Неравенства в механике и их приложения. – М.: Мир, 1989. – 492 с.
6. Лионс, Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. – М.: Мир, 1972. – 587 с.
7. Fichera, G. Problemi elastostatici con vincoli unilaterali: il problema di Signorini con ambigue condizioni al contorno // Mem. Accad. Naz. Lincei. –1964. – Ser. 8, 7. – P. 91-140.
8. Сьярле, Ф. Метод конечных элементов для эллиптических задач. – М.: Мир, 1980. – 512 с.
9. Бертсекас, Д. Условная оптимизация и методы множителей Лагранжа. – М.: Радио и связь, 1987. – 400 с.
10. Гольштейн, Е.Г. Модифицированные функции Лагранжа. Теория и методы оптимизации / Е.Г. Гольштейн, Н.В. Третьяков. – М.: Наука, 1989. – 400 с.
11. Гроссман, К. Нелинейное программирование на основе безусловной минимизации / К. Гроссман, А.А. Каплан. – Новосибирск: Наука. Сибирское отд., 1981. – 183 с.
12. Даутов, Р.З. Задача с препятствием внутри области. Приближенное определение свободной границы // Итерационные методы решения линейных и нелинейных сеточных задач. Материалы Всероссийской молодежной школы-конференции (Казань, 26 сентября – 1 октября 1999 г.). Труды математического центра им. Н.И. Лобачевского. – Т. 2. – С. 120-169.
13. Вихтенко, Э.М. Метод множителей Лагранжа для задачи с препятствием // Вестник Тихоокеанского гос. ун-та, 2010. – № 2(17). – С. 35-46.
14. Каплан, А.А. Вариационные неравенства и полубесконечные задачи выпуклой оптимизации / А.А. Каплан, Р. Тихачке // Препринт АН СССР, Сиб. отд. Ин-т математики. – Новосибирск, 1989. – № 27. – 46 с.
15. Гольштейн, Е.Г. Модифицированные функции Лагранжа. Теория и методы оптимизации / Е.Г. Гольштейн, Н.В. Третьяков. – М.: Наука, 1989. – 400 с.
16. Glowinski, R. Numerical methods for nonlinear variational problems. – N.Y.: Springer, 1984. – 381 p.

УДК 514.742.24

И.П. Попов

УСТАНОВЛЕНИЕ ВЕКТОРНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ ДВУХ ВЕКТОРОВ В $\mathbb{R}^n$

Излагается метод определения векторного произведения двух векторов в n-мерном евклидовом пространстве при n > 3.

Ключевые слова: векторное произведение, многомерное пространство, базис, расщепление, слияние.

DETERMINATION OF VECTOR PRODUCT OF TWO VECTORS IN $\mathbb{R}^n$

A method for determining the vector product of two vectors in an n-dimensional Euclidean space for n > 3 is presented.

Key words: vector product, multidimensional space, basis, splitting, fusion.

Целью работы является определение векторного произведения двух векторов $\mathbf{c} = [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ в n-мерном евклидовом пространстве при $n > 3$.

Далее применяются ортонормированные базисы [1–5].

1. Теорема существования и единственности

Теорема 1. *Для двух линейно независимых векторов* $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{b}$ *в* $\mathbb{R}^n$ *существует их векторное произведение* $\mathbf{c} = [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$.

Доказательство. Три линейно независимых вектора **a**, **b** и **g** имеют инвариантное описание, включающее длины векторов, углы между ними и их взаимную ориентацию. Для каждого из этих трех векторов *однозначно* определена их проекция на любой другой вектор. Другими словами, определены их попарные скалярные произведения.

В этой связи векторы **a**, **b** и **g** могут иметь *однозначное* координатное описание в базисах любой размерности, начиная с 3 (пассивная точка зрения – alias). При координатном описании они сохраняют размеры, углы между ними и взаимную ориентацию. Иначе говоря, координатное описание той или иной размерности при пассивной точке зрения не меняет сущность векторов и их отношений друг к другу. Следовательно, если в качестве вектора **g** рассматривать вектор **c**, являющийся при инвариантном описании векторным произведением векторов **a** и **b**, то его сущность в этом качестве не изменится при координатном описании в $\mathbb{R}^n$. Теорема доказана.

2. Расщепление базисных векторов

Определение 1. *m-расщеплением базисного вектора* $\mathbf{e}_i$ *в* $\mathbb{R}^n$ *является его замена на m векторов* $\mathbf{e}_{i1},\dots,\mathbf{e}_{ij},\dots,\mathbf{e}_{im}$, *ортогональных друг другу и всем другим базисным векторам исходного базиса. При этом*

$$\mathbf{e}_i = \sum_{j=1}^{m} k_{ij}\mathbf{e}_{ij},$$

где k_{ij} *– направляющие косинусы* $\mathbf{e}_i$ *в базисе* $\mathbf{e}_{i1},\dots,\mathbf{e}_{ij},\dots,\mathbf{e}_{im}$; *m*-расщепление базисного вектора повышает размерность пространства на $m-1$.

Выбор направляющих косинусов k_{ij} может быть сопряжен с произволом. Произвол минимизируется при *симметричном m*-расщеплении.

Определение 2. *Симметричное m-расщепление базисного вектора – это m-расщепление, при котором*

$$\forall j \in [1,m] \middle| k_{ij} = \frac{\left|\sqrt{m}\right|}{m}.$$

3. Представление векторного произведения двух векторов в $\mathbb{R}^n$

Теорема 2. *Векторное произведение* $\mathbf{c} = [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ *может быть представлено в* $\mathbb{R}^n$.

Доказательство. Пусть в $\mathbb{R}^3$ имеются два линейно независимых вектора **a** и **b**. Их координаты равны

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ и } b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Для векторов **a** и **b** в $\mathbb{R}^3$ определено векторное произведение $\mathbf{c} = [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$.

Его координаты равны

$$c = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c_3 \end{pmatrix}.$$

Базисный вектор $\mathbf{e}_3$ подвергается симметричному $(n-2)$-расщеплению. В образовавшемся $\mathbb{R}^n$ (в базисе ${}^1\mathbf{e}_1, {}^1\mathbf{e}_2, \dots, {}^1\mathbf{e}_n$) имеют место все три вектора (пассивная точка зрения), координаты которых, соответственно, равны

$$ {}^1a = \begin{pmatrix} {}^1a_1 \\ {}^1a_2 \\ 0_3 \\ \dots \\ 0_n \end{pmatrix},\ {}^1b = \begin{pmatrix} {}^1b_1 \\ {}^1b_2 \\ 0_3 \\ \dots \\ 0_n \end{pmatrix},\ {}^1c = \begin{pmatrix} 0_1 \\ 0_2 \\ {}^1c_3 \\ \dots \\ {}^1c_n \end{pmatrix}. \qquad (1) $$

Здесь $\forall i \in [3, n] \big| \cdot {}^1c_i = \dfrac{\left|\sqrt{n-2}\right|}{n-2} c_3$.

Произвольная квадратная матрица отображения T позволяет получить координаты всех трех векторов в другом базисе этой же размерности ${}^2\mathbf{e}_1, {}^2\mathbf{e}_2, \dots, {}^2\mathbf{e}_n$.

$$ {}^2a = T \cdot {}^1a = \begin{pmatrix} {}^2a_1 \\ \dots \\ {}^2a_n \end{pmatrix},\ {}^2b = T \cdot {}^1b = \begin{pmatrix} {}^2b_1 \\ \dots \\ {}^2b_n \end{pmatrix},\ {}^2c = T \cdot {}^1c = \begin{pmatrix} {}^2c_1 \\ \dots \\ {}^2c_n \end{pmatrix}. \qquad (2) $$

Таким образом, в произвольном базисе ${}^2\mathbf{e}_1, {}^2\mathbf{e}_2, \dots, {}^2\mathbf{e}_n$ для двух векторов **a** и **b** имеет место их векторное произведение **c** = [**a**, **b**] с координатами (2). Теорема доказана. Тем самым решена некоторым образом обратная задача – при известном векторном произведении определение координат всех трех векторов в $\mathbb{R}^n$.

Пример 1. В $\mathbb{R}^3$ координаты векторов **a** и **b** равны $a = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Координаты векторного произведения **c** = [**a**, **b**] равны $c = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}$.

Базисный вектор $\mathbf{e}_3$ подвергается симметричному 2-расщеплению. В образовавшемся $\mathbb{R}^4$ координаты векторов равны

$$ {}^1a = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ {}^1b = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ {}^1c = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7{,}071 \\ 7{,}071 \end{pmatrix}. $$

Произвольная квадратная матрица отображения

$$ T = \begin{pmatrix} 0{,}497 & 0{,}628 & 0{,}287 & -0{,}527 \\ 0{,}47 & 0{,}22 & -0{,}814 & 0{,}262 \\ -0{,}171 & 0{,}604 & 0{,}296 & 0{,}72 \\ 0{,}709 & -0{,}439 & 0{,}41 & 0{,}369 \end{pmatrix} $$

позволяет получить координаты всех трех векторов в другом базисе этой же размерности

$$ {}^2a = T \cdot {}^1a = \begin{pmatrix} 2{,}876 \\ 1{,}599 \\ 1{,}47 \\ 0{,}101 \end{pmatrix},\ {}^2b = T \cdot {}^1b = \begin{pmatrix} 3{,}138 \\ 1{,}099 \\ 3{,}02 \\ -2{,}197 \end{pmatrix},\ {}^2c = T \cdot {}^1c = \begin{pmatrix} -1{,}695 \\ -3{,}902 \\ 7{,}184 \\ 5{,}503 \end{pmatrix}. $$

Здесь **c** = [**a**, **b**].

4. Ориентация векторного произведения

Вектор **c** = [**a**, **b**] должен быть перпендикулярен плоскости, в которой лежат векторы **a** и **b**.

В трехмерном пространстве к этой плоскости может быть построено два перпендикуляра (левый и правый), что создает неоднозначность в направлении **c**. Для преодоления этой неоднозначности в качестве направления **c** постулируется один из двух перпендикуляров – правый относительно **a** и **b**.

В пространствах более высокой размерности неоднозначность выше – равна бесконечности. Она может быть преодолена точно так же, как и в трехмерном, – выбором одного, наиболее подходящего варианта.

По аналогии с взаимным расположением вектора **c** и вектора, являющегося суммой базисных ортов, имеющем место для частного случая (1), для произвольного базиса можно принять следующее.

Условие 1. *Векторное произведение* **c** = [**a**, **b**] *в* $\mathbb{R}^n$ *лежит на одной прямой с проекцией суммы базисных ортов на* (n – 2)*-плоскость, перпендикулярную векторам* **a** *и* **b**.

Векторное произведение в $\mathbb{R}^3$ формально удовлетворяет условию 1.

5. Повороты координатных 2-плоскостей

Пусть в базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_n$ вектор **d** имеет координаты *d*.

Повороту *ij*-й координатной 2-плоскости соответствует следующая матрица перехода

$$T_{ij} = \begin{pmatrix} 1_{11} & 0_{12} & \vdots & 0_{1i} & \vdots & 0_{1j} & \vdots & 0_{1n} \\ 0_{21} & 1_{22} & \vdots & 0_{2i} & \vdots & 0_{2j} & \vdots & 0_{2n} \\ ... & ... & \vdots & ... & \vdots & ... & \vdots & ... \\ 0_{i1} & 0_{i2} & \vdots & \cos\varphi & \vdots & \sin\varphi & \vdots & 0_{in} \\ ... & ... & \vdots & ... & \vdots & ... & \vdots & ... \\ 0_{j1} & 0_{j2} & \vdots & -\sin\varphi & \vdots & \cos\varphi & \vdots & 0_{jn} \\ ... & ... & \vdots & ... & \vdots & ... & \vdots & ... \\ 0_{n1} & 0_{n2} & \vdots & 0_{ni} & \vdots & 0_{nj} & \vdots & 1_{nn} \end{pmatrix}. \quad (3)$$

При этом

$$\cos\varphi = \frac{d_i}{\sqrt{d_i^2 + d_j^2}}, \ \sin\varphi = \frac{d_j}{\sqrt{d_i^2 + d_j^2}}.$$

В результате поворота координаты приобретают значения

$$\tilde{d}_i = d_i \cos\varphi + d_j \sin\varphi = \sqrt{d_i^2 + d_j^2},$$

$$\tilde{d}_j = -d_i \sin\varphi + d_j \cos\varphi = 0.$$

Все другие координаты остаются без изменения.

Таким образом, поворот *ij*-й координатной 2-плоскости в соответствии с матрицей перехода T_{ij} обнуляет координату *j* вектора **d**.

6. Определение векторного произведения двух векторов в $\mathbb{R}^n$

Пусть в базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_n$ векторы **a** и **b** имеют координаты

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ ... \\ a_n \end{pmatrix}, \ b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Для перехода к новому базису ${}^*\mathbf{e}_1, {}^*\mathbf{e}_2, ..., {}^*\mathbf{e}_n$, в котором векторы **a** и **b** будут иметь координаты

$$ {}^*a = \begin{pmatrix} {}^*a_1 \\ 0_2 \\ ... \\ 0_n \end{pmatrix}, \quad {}^*b = \begin{pmatrix} {}^*b_1 \\ {}^*b_2 \\ 0_3 \\ ... \\ 0_n \end{pmatrix}, $$

следует выполнить $2n - h - l$ поворотов координатных 2-плоскостей. Здесь h – число ненулевых координат обоих векторов в новом базисе, l – число нулевых координат в исходном базисе. В рассматриваемом случае $h = 3$. Каждому повороту соответствует своя матрица T_k типа (3).

Матрица перехода от базиса $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_n$ к базису ${}^*\mathbf{e}_1, {}^*\mathbf{e}_2, ..., {}^*\mathbf{e}_n$ равна

$$ T = \prod_{k=2n-h-l}^{1} T_k, $$

т.е. перемножение производится в обратной последовательности. При этом

$$ {}^*a = Ta, \quad {}^*b = Tb. $$

Сумма ортов базиса $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_n$ в новом базисе ${}^*\mathbf{e}_1, {}^*\mathbf{e}_2, ..., {}^*\mathbf{e}_n$ имеет координаты

$$ {}^*s = Ts = T \begin{pmatrix} 1 \\ ... \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^*s_1 \\ {}^*s_2 \\ {}^*s_3 \\ ... \\ {}^*s_n \end{pmatrix}. $$

Координаты вектора **c** = [**a**, **b**] в новом базисе ${}^*\mathbf{e}_1, {}^*\mathbf{e}_2, ..., {}^*\mathbf{e}_n$ в соответствии с условием 1 равны:

$$ {}^*c = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ {}^*c_3 \\ ... \\ {}^*c_n \end{pmatrix}, \quad {}^*c_i = \frac{{}^*s_i \sqrt{\mathbf{a}^2\mathbf{b}^2 - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2}}{\left| \sqrt{\sum_{j=3}^{n} {}^*s_j^2} \right|}, \quad i \in [3, n]. \tag{4} $$

Вектор **c** с координатами ${}^*c$ можно разложить на две составляющие: $\mathbf{c}_1$ с положительными координатами и $\mathbf{c}_2$ – с отрицательными.

Условие 2. *Знак радикала в* (4) *выбирается таким образом, чтобы больший из векторов* $\mathbf{c}_1$ *и* $\mathbf{c}_2$ *образовывал с* **a** *и* **b** *правую тройку векторов.*

Условие 3. *Если* $\mathbf{c}_1 = \mathbf{c}_2$, *то векторы* **a**, **b** *и* **c** *имеют* ***нейтральную*** *ориентацию. В этом случае направление* **c** *является* ***двузначным***.

Координаты вектора **c** = [**a**, **b**] в исходном базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_n$ равны

$$ c = T^{-1} \cdot {}^*c = \begin{pmatrix} c_1 \\ ... \\ c_n \end{pmatrix}. $$

Пример 2. В $\mathbb{R}^4$ по известным значениям **a** и **b** отыскать **c** = [**a**, **b**].

$$a=\begin{pmatrix}3,37\\2,762\\-2,395\\-0,532\end{pmatrix},\ b=\begin{pmatrix}3,289\\1,539\\-5,697\\1,834\end{pmatrix}.$$

$$T_1=\begin{pmatrix}0,988&0&0&-0,156\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0,156&0&0&0,988\end{pmatrix},\ {}^1a=T_1a=\begin{pmatrix}3,411\\2,762\\-2,395\\0\end{pmatrix}.$$

$$T_2=\begin{pmatrix}0,818&0&-0,575&0\\0&1&0&0\\0,575&0&0,818&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\ {}^2a=T_2\cdot{}^1a=\begin{pmatrix}4,168\\2,762\\0\\0\end{pmatrix}.$$

$$T_3=\begin{pmatrix}0,834&0,552&0&0\\-0,552&0,834&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\ {}^3a=T_3\cdot{}^2a=\begin{pmatrix}5\\0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

$$T_{31}=T_3T_2T_1=\begin{pmatrix}0,674&0,552&-0,479&-0,106\\-0,447&0,834&0,317&0,07\\0,568&0&0,818&-0,09\\0,156&0&0&0,988\end{pmatrix},\ {}^3b=T_{31}b=\begin{pmatrix}5,6\\-1,865\\-2,96\\2,324\end{pmatrix}.$$

$$T_4=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-0,626&0&0,78\\0&0&1&0\\0&-0,78&0&-0,626\end{pmatrix},\ {}^4b=T_4\cdot{}^3b=\begin{pmatrix}5,6\\2,98\\-2,96\\0\end{pmatrix}.$$

$$T_5=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0,709&-0,705&0\\0&0,705&0,709&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\ {}^5b=T_5\cdot{}^4b=\begin{pmatrix}5,6\\4,2\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Матрица перехода от исходного базиса $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3,\mathbf{e}_4$ к базису ${}^5\mathbf{e}_1,{}^5\mathbf{e}_2,{}^5\mathbf{e}_3,{}^5\mathbf{e}_4$ равна

$$T_{51}=T_5T_4T_{31}=T_5T_4T_3T_2T_1=\begin{pmatrix}0,674&0,552&-0,479&-0,106\\-0,115&-0,37&-0,718&0,578\\0,685&-0,368&0,441&0,448\\0,251&-0,65&-0,248&-0,673\end{pmatrix}.$$

Очевидно, что

${}^5a=T_{51}a={}^3a$, ${}^5b=T_{51}b$.

Сумма ортов исходного базиса $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3,\mathbf{e}_4$ в новом базисе ${}^5\mathbf{e}_1,{}^5\mathbf{e}_2,{}^5\mathbf{e}_3,{}^5\mathbf{e}_4$ имеет координаты

$${}^5s=T_{51}s=T_{51}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0,641\\-0,625\\1,207\\-1,32\end{pmatrix}.$$

В соответствии с (4):

$$ {}^5c = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 14,169 \\ -15,5 \end{pmatrix}. $$

Координаты вектора **c** = [**a**, **b**] в исходном базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4$ равны

$$ c = T_{51}^{-1} \cdot {}^5c = \begin{pmatrix} 5,822 \\ 4,869 \\ 10,081 \\ 16,786 \end{pmatrix}. $$

Замечание. Фиксированные значения ${}^*a$ и ${}^*b$ (${}^5a$ и ${}^5b$ в примере 2) могут быть получены при различных значениях матрицы перехода T (T_{51}). Нетрудно убедиться, что значение векторного произведения **c** остается при этом неизменным, поскольку взаимное расположение векторов **a**, **b** и суммы исходных базисных ортов при любом преобразовании координат не изменяется.

1. Попов, И.П. Разновидности оператора набла // Вестник Амурского гос. ун-та. Естественные и экономические науки. – 2015. – Вып. 71. – С. 20-32.

2. Попов, И.П. Применение неопределенного интеграла для восстановления функции по ее градиенту // Вестник Амурского гос. ун-та. Естественные и экономические науки. – 2017. – Вып. 77. – С. 18-21.

3. Попов, И.П. Приложение мнимых векторов к моделированию абстрактного силового поля // Вестник Амурского гос. ун-та. Естественные и экономические науки. – 2016. – Вып. 73. – С. 10-24.

4. Попов И.П. Скалярное и векторное дифференцирование векторов // Вестник Волгоградского гос. ун-та. Серия 1: Математика. Физика. – 2016. – № 3 (34). – С. 19-27.

5. Попов, И.П. О некоторых операциях над векторами // Вестник Волгоградского гос. ун-та. Серия 1: Математика. Физика. – 2014. – № 5 (24). – С. 55-61.