УДК 519.853.2 + 519.632

Н.Н. Максимова, М.И. Матущак

ПОСТРОЕНИЕ КЛАССИЧЕСКОЙ СХЕМЫ ДВОЙСТВЕННОСТИ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ КОЭРЦИТИВНОЙ ЗАДАЧИ С ПРЕПЯТСТВИЕМ

В работе рассматривается построение схемы двойственности с классическим функционалом Лагранжа для исследования коэрцитивной вариационной задачи с препятствием в одномерной постановке.

Ключевые слова: вариационная задача с препятствием, классический функционал Лагранжа, седловая точка, алгоритм Удзавы.

THE CONSTRUCTION OF A CLASSICAL DUALITY SCHEME FOR RESEACH OF THE COERCTIVE OBSTACLE PROBLEM

In this paper, the construction of a duality scheme with the classical Lagrange functional for investigating the coercive variational obstacle problem with in a one-dimensional formulation is considered.

Key words: the Variational Obstacle Problem, the Classical Lagrange Functional, the Saddle Point, the Udzawa Algorithm.

Введение

Математическая постановка задач механики сплошной среды сводится к краевой задаче для дифференциального уравнения в частных производных. Многие линейные задачи математической физики допускают естественную вариационную постановку, которая состоит в минимизации выпуклого функционала потенциальной энергии на некотором линейном множестве.

В последнее время наибольший интерес представляют нелинейные краевые задачи, вариационные постановки которых состоят в минимизации некоторого выпуклого функционала на выпуклом замкнутом множестве. Тем самым вариационные постановки являются задачами на условный (или безусловный, если допустимое множество представляет собой некоторое пространство функций) экстремум. Третья эквивалентная постановка подобных задач представляет собой вариационное неравенство.

К такого рода задачам можно отнести большое количество проблем, имеющих физический интерес: задача теории смазки, стационарная фильтрация жидкости через пористую перегородку, обтекание жидкостью заданного профиля, задачи об управлении температурой, классические задачи и задачи с трением в теории упругости и вязко-упругости, задачи теории пластичности, задачи на односторонний изгиб тонких упругих пластин, динамические односторонние задачи для пластин, задачи для жидкости Бингама и др. Применение теории вариационных неравенств к этим и многим другим задачам можно найти в работах Р. Гловински и Ж.-Л. Лионса [1], Г. Дюво [2], Д. Киндерлерера и Г. Стампаккьи [3], А.С. Кравчука[4], П. Панагиотопулоса [5] и др.

Простейшая модельная задача, которая приводит к вариационным неравенствам, – это задача о кратчайшем пути, соединяющим две заданные точки на плоскости и обходящем некоторые препятствия [2]. Источником для создания теории вариационных неравенств послужила задача из теории упругости (задача Синьорини), впервые полностью изученная в работе Фикеры, где были заложены основы теории вариационных неравенств [6, 7]. В настоящее время данная теория находится в стадии бурного развития и представляет интерес не только для исследователей-математиков и механиков, но и для экономистов, поскольку вариационные неравенства нашли применение при моделировании и исследовании равновесных задач экономики, а также исследовании операций.

Большинство прикладных задач механики, как правило, не имеют явного решения, и поэтому для получения нужного результата приходится прибегать к численным методам решения. Контактные задачи не исключение. Основным методом решения вариационных задач является метод конечных элементов, очень подробно рассматриваемый в работах Р. Гловински [1], Ф. Сьярле [8].

Кроме того, большинство задач механики в вариационной постановке – это задачи на условный экстремум. Поэтому бурное развитие получили подходы, основанные на построении схем двойственности к исходным постановкам. Такой подход состоит в замене задачи условной оптимизации задачей отыскания седловой точки функционала Лагранжа. Конструкция, известная как «функционал Лагранжа», лежит в основе общепринятой схемы анализа экстремальных задач с ограничениями [9-11]. Функционал Лагранжа формируется по исходной задаче и зависит от двух групп переменных – прямых (переменных исходной задачи) и двойственных (переменных, отвечающих ограничениям). Главное свойство функционала Лагранжа состоит в том, что решение задачи выпуклого программирования совпадает с прямой переменной седловой точки функционала Лагранжа.

Постановка задачи

Рассмотрим классический пример задачи о препятствии, физическая постановка которой заключается в следующем [12]. Пусть тонкая упругая мембрана с натяжением τ закреплена по контуру Γ, ограничивающему область $\Omega \subset R_n$ $(n=1,2)$, и находится под действием «вертикальной» силы плотности *f*. Предположим также, что прогибы мембраны ограничены «снизу» жестким препятствием, описываемым функцией ψ (рис. 1). Требуется описать положение равновесия мембраны. Предположим, что τ, ψ, f являются достаточно гладкими функциями, $\psi(x) \le 0$ на границе Γ и существуют постоянные $\tau_0, \tau_1 > 0$ – такие, что $\tau_0 \le \tau(x) \le \tau_1$ в Ω.

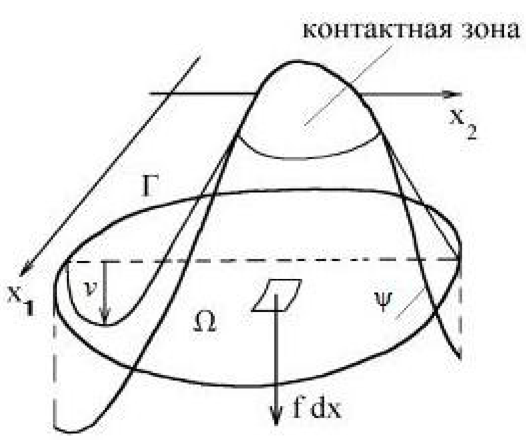

Рис. 1. Мембрана над препятствием.

Обозначим через $v(x)$ прогиб мембраны в точке $x \in \Omega$, через I – область, где мембрана касается препятствия, т.е. множество

$$I = \{x \in \Omega : v(x) = \psi(x)\},$$

а через F его границу: $F = \partial(\Omega \setminus I) \cap \Omega$. Отметим, что контактная область I заранее не известна. Отсюда и название подобных задач – задачи с неизвестной границей.

Одной из математических формулировок является задача вариационного исчисления, которая выражает известный в механике вариационный принцип Дирихле: среди всех допустимых положений мембрана в состоянии равновесия занимает положение с минимальной энергией.

Обозначим через $K=\left\{v\in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega: v(x)\geq\psi(x) \text{ п. в. в } \Omega\right\}$ – множество возможных прогибов.

Функционал энергии имеет вид

$$J(v)=\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}\tau\left|\nabla v\right|^2 dx-\int\limits_{\Omega} fvdx. \tag{1}$$

Таким образом, вариационная постановка задачи состоит в следующем: необходимо найти такую функцию $v\in K$, на которой функционал (1) принимает минимальное значение.

Положим $\tau\equiv 1$ и в качестве расчетной области выберем интервал $(0, 1)$ на числовой оси. Тогда соответствующая одномерная вариационная задача принимает вид

$$\begin{cases} J(v)=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int\limits_0^1 v'^2 dx-\int\limits_0^1 f\,v\,dx\to\min, \\ v\in K=\left\{v\in \overset{\circ}{W}{}_2^1(0,1): v\geq\psi \ \text{ п.в. в } (0,1)\right\}. \end{cases} \tag{2}$$

Задача (1) называется полукоэрцитивной, поскольку функционал в (1) является полукоэрцитивным, что может осложнить процесс численного решения задачи. Поэтому наряду с полукоэрцитивной постановкой рассмотрим соответствующую одномерную коэрцитивную задачу

$$\begin{cases} J(v)=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int\limits_0^1 \left(v^2+v'^2\right)dx-\int\limits_0^1 f\,v\,dx\to\min, \\ v\in K=\left\{v\in \overset{\circ}{W}{}_2^1(0,1): v\geq\psi \ \text{ п.в. в } (0,1)\right\}. \end{cases} \tag{3}$$

Коэрцитивность функционала $J(v)$ в (3) означает, что $J(v)\to+\infty$ при $\|v\|_{W_2^1(0,1)}\to\infty$, откуда следуют существование и единственность решения задачи (3).

Кроме того, функционал $J(v)$ в (3) является строго выпуклым в $W_2^1(0,1)$, множество K является выпуклым множеством, поэтому для исследования задачи (3) можно построить схему двойственности с классическим функционалом Лагранжа.

Схема двойственности с классическим функционалом Лагранжа

Запишем классический функционал Лагранжа для задачи (3)[13]:

$$L(v,l)=J(v)+\int\limits_0^1 l\,(\psi-v)\,dx=\frac{1}{2}\int\limits_0^1\left(v^2+v'^2\right)dx-\int\limits_0^1 f\,v\,dx+\int\limits_0^1 l\,(\psi-v)\,dx,$$

$$\forall\,(v,l)\in \overset{\circ}{W}{}_2^1(0,1)\times L_2(0,1).$$

Функционал $L(v,l)$ является выпуклым по *v* при фиксированном *l* и вогнутым по *l* при фиксированном *v*.

Через $\left(L_2(0,1)\right)^+$ обозначим множество неотрицательных функций из $L_2(0,1)$, интегрируемых со своим квадратом.

<u>Определение.</u> Пара $(v^*,l^*)\in \overset{\circ}{W}{}_2^1(0,1)\times\left(L_2(0,1)\right)^+$ называется седловой точкой для $L(v, l)$, если выполняется двустороннее неравенство

$$L(v^*,l)\leq L(v^*,l^*)\leq L(v,l^*),\qquad \forall\,v\in \overset{\circ}{W}{}_2^1(0,1),\ \forall\,l\in(L_2(0,1))^+ .$$

Тем самым в точке $v^* \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(0,1)$ достигается минимум функционала $L(v, l)$ по v при фиксированном $l^* \in (L_2(0,1))^+$ и в точке $l^* \in (L_2(0,1))^+$ достигается максимум функционала $L(v, l)$ по l при фиксированном $v^* \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(0,1)$. Кроме того, точка $v^* \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(0,1)$ является решением исследуемой задачи (3) [13].

В работе [14] для полукоэрцитивного случая показано, что классический функционал Лагранжа имеет на $\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,1)\times\left(L_2(0,1)\right)^+$ единственную седловую точку $(v^*, -\Delta v^* - f)$. Однако применение схемы двойственности с классическим функционалом Лагранжа при решении полукоэрцитивной задачи невозможно в силу того, что шаг параметра сдвига по двойственной переменной необходимо согласовывать с константой положительной определенности квадратичной формы минимизируемого функционала, равной в этом случае нулю. От такого недостатка избавлены модифицированные функции Лагранжа [15], применение которых для исследования полукоэрцитивной задачи планируется авторами в будущем.

Известный метод Удзавы поиска седловой точки функционала $L(v, l)$ в коэрцитивном случае обеспечивает сходимость процесса по прямой переменной в случае малых шагов сдвига по двойственной переменной [16].

Алгоритм Удзавы поиска седловой точки

Для поиска седловой точки функционала Лагранжа применим следующий метод. Задаем произвольно $l^0 \in (L_2(0,1))^+$, на k-й итерации метода:

Шаг 1. Определяем

$$v^k = \arg \min_{v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(0,1)} L(v, l^{k-1});$$

Шаг 2. Полагаем

$$l^k = \left(l^{k-1} + r\,(\psi - v^k)\right)^+,$$

где r – параметр сдвига по двойственной переменной.

Первый шаг алгоритма Удзавы представляет собой процесс минимизации функционала Лагранжа по v при фиксированном l^{k-1}. На втором шаге реализован градиентный метод поиска максимума функционала Лагранжа по l при фиксированном v^k.

Заключение

В работе представлена одномерная коэрцитивная постановка вариационной задачи с трением. Для исследования задачи предложен классический метод двойственности. Данный подход состоит в замене задачи условной оптимизации задачей отыскания седловой точки функционала Лагранжа. Для поиска седловой точки функционала Лагранжа предложен алгоритм Удзавы.

В дальнейшем авторами работы будет численно реализован данный метод с применением метода конечных элементов, будут проведены серии вычислительных экспериментов.

1. Гловински, Р. Численное исследование вариационных неравенств / Р. Гловински, Ж.-Л. Лионс, Р. Тремольер. – М.: Мир, 1979. – 574 с.

2. Дюво, Г. Неравенства в механике и физике / Г. Дюво, Ж.-Л. Лионс. – М.: Мир, 1980. – 383 с.

3. Киндерлерер, Д. Введение в вариационные неравенства и их приложения / Д. Киндерлерер, Г. Стампаккья. – М.: Мир, 1983. – 256 с.

4. Кравчук, А.С. Вариационные и квазивариационные неравенства в механике. – М.: Изд-во Московской государственной академии приборостроения и информатики, 1997. – 339 с.

5. Панагиотопулос, П. Неравенства в механике и их приложения. – М.: Мир, 1989. – 492 с.
6. Лионс, Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. – М.: Мир, 1972. – 587 с.
7. Fichera, G. Problemi elastostatici con vincoli unilaterali: il problema di Signorini con ambigue condizioni al contorno // Mem. Accad. Naz. Lincei. –1964. – Ser. 8, 7. – P. 91-140.
8. Сьярле, Ф. Метод конечных элементов для эллиптических задач. – М.: Мир, 1980. – 512 с.
9. Бертсекас, Д. Условная оптимизация и методы множителей Лагранжа. – М.: Радио и связь, 1987. – 400 с.
10. Гольштейн, Е.Г. Модифицированные функции Лагранжа. Теория и методы оптимизации / Е.Г. Гольштейн, Н.В. Третьяков. – М.: Наука, 1989. – 400 с.
11. Гроссман, К. Нелинейное программирование на основе безусловной минимизации / К. Гроссман, А.А. Каплан. – Новосибирск: Наука. Сибирское отд., 1981. – 183 с.
12. Даутов, Р.З. Задача с препятствием внутри области. Приближенное определение свободной границы // Итерационные методы решения линейных и нелинейных сеточных задач. Материалы Всероссийской молодежной школы-конференции (Казань, 26 сентября – 1 октября 1999 г.). Труды математического центра им. Н.И. Лобачевского. – Т. 2. – С. 120-169.
13. Вихтенко, Э.М. Метод множителей Лагранжа для задачи с препятствием // Вестник Тихоокеанского гос. ун-та, 2010. – № 2(17). – С. 35-46.
14. Каплан, А.А. Вариационные неравенства и полубесконечные задачи выпуклой оптимизации / А.А. Каплан, Р. Тихачке // Препринт АН СССР, Сиб. отд. Ин-т математики. – Новосибирск, 1989. – № 27. – 46 с.
15. Гольштейн, Е.Г. Модифицированные функции Лагранжа. Теория и методы оптимизации / Е.Г. Гольштейн, Н.В. Третьяков. – М.: Наука, 1989. – 400 с.
16. Glowinski, R. Numerical methods for nonlinear variational problems. – N.Y.: Springer, 1984. – 381 p.

УДК 514.742.24

И.П. Попов

УСТАНОВЛЕНИЕ ВЕКТОРНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ ДВУХ ВЕКТОРОВ В $\mathbb{R}^n$

Излагается метод определения векторного произведения двух векторов в n-мерном евклидовом пространстве при n > 3.

Ключевые слова: векторное произведение, многомерное пространство, базис, расщепление, слияние.

DETERMINATION OF VECTOR PRODUCT OF TWO VECTORS IN $\mathbb{R}^n$

A method for determining the vector product of two vectors in an n-dimensional Euclidean space for n > 3 is presented.

Key words: vector product, multidimensional space, basis, splitting, fusion.

Целью работы является определение векторного произведения двух векторов $\mathbf{c} = [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ в n-мерном евклидовом пространстве при $n > 3$.

Далее применяются ортонормированные базисы [1–5].

1. Теорема существования и единственности

Теорема 1. *Для двух линейно независимых векторов* $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{b}$ *в* $\mathbb{R}^n$ *существует их векторное произведение* $\mathbf{c} = [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$.