УДК 514.3

А.П. Филимонова, Т.А. Юрьева

АНАЛОГ ТЕОРЕМ РАСПОЛОЖЕНИЯ ЗАМКНУТЫХ ВЫПУКЛЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ С ЗАДАННОЙ ФУНКЦИЕЙ ВНУТРЕННЕЙ КРИВИЗНЫ В ПРОСТРАНСТВАХ ПОСТОЯННОЙ КРИВИЗНЫ

В статье рассматривается один из первых этапов в исследовании дифференциального уравнения Монжа – Ампера общего вида – установление априорных оценок решения этого уравнения на сфере. Доказывается утверждение, которое в аналитическом плане аналогично теореме о расположении поверхности, заданной гауссовой кривизной между концентрическими сферами в евклидовом трехмерном пространстве.

Ключевые слова: восстановление поверхности, уравнение типа Монжа-Ампера, отрицательная эллиптичность, априорные оценки.

THE ANALOGUE OF THE THEOREMS OF LOCATION OF CLOSED CONVEX SURFACES WITH A PREDETERMINED FUNCTION OF THE INTERNAL CURVATURE IN SPACES OF CONSTANT CURVATURE

The article discusses one of the first steps in the study of differential equations of Monge – Ampere general form, namely, the establishment of a priori estimates of the solutions of this equation on the sphere. We prove the claim that the analytical plan is similar to the theorem about the location of the surface defined by the Gaussian curvature of the concentric spheres in Euclidean three-dimensional space.

Key words: the restoration of the surface, an equation of Monge-ampère type, the negative ellipticity, a priori estimates.

Известно, что геометрические задачи восстановления поверхностей по тем или иным геометрическим характеристикам тесно связаны с исследованием дифференциальных уравнений определенного вида на многообразиях.

Приведем пример задачи такого рода.

Пусть в трехмерном евклидовом пространстве E^3 ($K_{E^3} = const = 0$) фиксированы некоторая точка O и сфера S_1^2 единичного радиуса с центром в этой точке. Сфера S_1^2 является двумерным многообразием, атлас которого можно выбрать так, чтобы для локальных сферических координат u, v выполнялось неравенство: $\sin u \geq \eta > 0$ в каждой карте.

Зададим функцию в $E^3/\{0\}$: $K_{\text{int}}(u,v,\rho) = K(u,v,\rho)$ ($(u,v) \in S_1^2$, $\rho \in R^+$).

Пусть F – поверхность в E^3, обладающая следующими свойствами: F – регулярная поверхность; F – выпуклая гомеоморфная сфере S_1^2; F – звездная относительно точки O.

Поверхность F можно задать в координатах u, v, ρ уравнением: $\rho = \rho(u, v)$.

Если в каждой точке поверхности F внутренняя (гауссова) кривизна равна значению функции $K_{\text{int}}(u,v,\rho) = K(u,v,\rho)$ в той же точке, то функция $\rho(u,v)$, задающая F, является решением отрицательно эллиптичного уравнения Монжа – Ампера на S_1^2 [1]:

$$\begin{aligned}
&\rho_{11}\rho_{22} - \rho_{12}^2 - \rho_{11}\frac{\rho_v^2 + \rho^2\sin^2 u}{\rho} + 2\rho_{12}\frac{2\rho_u\rho_v}{\rho} - \rho_{22}\frac{\rho_u^2 + \rho^2}{\rho} = \\
&= K(u,v,\rho)\frac{\left(\rho_u^2\sin^2 u + \rho_v^2 + \rho^2\sin^2 u\right)^2}{\sin^2 u} - (2\rho_u^2\sin^2 u + 2\rho_v^2 + \rho^2\sin^2 u).
\end{aligned} \tag{1}$$

В уравнении (1) ρ_{11}, ρ_{12}, ρ_{22} – вторые ковариантные производные $\rho = \rho(u,v)$ относительно метрики S_1^2, $\sin u > 0$.

Таким образом, задача восстановления поверхности F в E^3 с заданной геометрической характеристикой – гауссовой кривизной – сводится к выявлению достаточных условий однозначной разрешимости уравнения (1).

Одним из первых этапов в исследовании уравнения (1) является установление априорных оценок решения этого уравнения в метрике $C^0(S_1^2)$.

Имеет место утверждение о расположении поверхности F между сферами $S_{\rho_1}^2$ и $S_{\rho_2}^2$ ($\rho_1 < \rho_2$) при условии: $K(u,v,\rho) < \dfrac{1}{\rho^2}$, если $\rho > \rho_2$ и $K(u,v,\rho) > \dfrac{1}{\rho^2}$, если $\rho < \rho_1$ [1].

Аналитически это означает, что при указанных ограничениях на функцию $K(u,v,\rho)$ имеют место оценки $\rho_1 \le \rho \le \rho_2$ в метрике $C^0(S_1^2)$ решения $\rho(u,v)$ уравнения (1).

Перейдем к рассмотрению дифференциального уравнения типа Монжа – Ампера общего вида на S_1^2 [2]:

$$\begin{aligned}
&\rho_{11}\rho_{22} - \rho_{12}^2 - \rho_{11}[f(\rho)\rho_v^2 + \varphi(\rho)\cdot\varphi_1(u,v)] + \\
&+2\rho_{12}\cdot f(\rho)\cdot\rho_u\rho_v - \rho_{22}[f(\rho)\cdot\rho_u^2 + \varphi(\rho)\cdot\varphi_2(u,v)] + \\
&+D(u,v,\rho,\rho_u,\rho_v) = \psi(u,v,\rho)\cdot D_1(u,v,\rho,\rho_u,\rho_v).
\end{aligned} \tag{2}$$

Здесь (u,v) – локальные географические координаты S_1^2; $\rho \in R^+$; ρ_{11}, ρ_{12}, ρ_{22} – вторые ковариантные производные $\rho = \rho(u,v)$ относительно метрики S_1^2.

В [2] указаны условия отрицательной эллиптичности уравнения (2):

1. $f(\rho) > 0$, $\varphi(\rho) > 0$, $\varphi_1(u,v) > 0$, $\varphi_2(u,v) > 0$;

2. $AC - B^2 - D + \psi D_1 > 0$, A, B, C – коэффициенты при $-\rho_{11}$, $2\rho_{12}$, $-\rho_{22}$ соответственно; D и D_1 есть функции от $u, v, \rho, \rho_u, \rho_v$.

Для уравнения (2) докажем утверждение, которое в аналитическом плане аналогично теореме о расположении поверхности F, заданной гауссовой кривизной в E^3, между концентрическими сферами $S_{\rho_1}^2$ и $S_{\rho_2}^2$ ($\rho_1 < \rho_2$).

<u>Теорема.</u> При наложении на функцию $\psi = \psi(u,v,\rho)$ уравнения (2) следующих условий:

1. $\psi(u,v,\rho) > \psi_0$, если $\rho < \rho_1$;

2. $\psi(u,v,\rho) < \psi_0$, если $\rho > \rho_2$, где $\rho_1 < \rho_2$ и ψ_0 есть отношение $\dfrac{D(u,v,\rho,0,0)}{D_1(u,v,\rho,0,0)}$, справедливы оценки решения $\rho(u,v)$ уравнения (2): $\rho_1 \le \rho(u,v) \le \rho_2$.

Доказательство.

Прежде всего отметим, что в силу компактности сферы S_1^2 решение уравнения (2): $\rho = \rho(u,v)$ класса $C^0(S_1^2)$ достигает на S_1^2 минимального и максимального значений соответственно в точках (u_0,v_0) и (u_1,v_1). В экстремальных точках $\rho_{11} = \rho_{uu}$, $\rho_{12} = \rho_{uv}$, $\rho_{22} = \rho_{vv}$, $\rho_u = \rho_v = 0$.

Получим оценку сверху для решения $\rho(u,v)$ уравнения (2).

Введем квадратичную форму:

$$(-f(\rho)\rho_v^2 - \varphi(\rho)\cdot\varphi_1(u,v))\xi^2 + 2f(\rho)\cdot\rho_u\rho_v\xi\eta + (-f(\rho)\cdot\rho_u^2 - \varphi(\rho)\cdot\varphi_2(u,v))\eta^2 .$$

Эта форма не является положительной.

Действительно, дискриминант ее равен

$$(-f(\rho)\rho_v^2 - \varphi(\rho)\cdot\varphi_1(u,v))(-f(\rho)\cdot\rho_u^2 - \varphi(\rho)\cdot\varphi_2(u,v)) - 2f^2(\rho)\cdot\rho^2{}_u\rho^2{}_v =$$
$$= \varphi(\rho)\cdot\varphi_1(u,v)\cdot f(\rho)\cdot\rho_u^2 + \varphi(\rho)\cdot\varphi_2(u,v)\cdot f(\rho)\rho_v^2 + \varphi^2(\rho)\cdot\varphi_1(u,v)\cdot\varphi_2(u,v) > 0$$

в силу наложенных на входящие функции условий [2]: $f(\rho) > 0$, $\varphi(\rho) > 0$, $\varphi_1(u,v) > 0$, $\varphi_2(u,v) > 0$.

Первый коэффициент формы: $-f(\rho)\rho_v^2 - \varphi(\rho)\cdot\varphi_1(u,v) < 0$ вследствие тех же условий.

Тогда введенная выше форма

$$(-f(\rho)\rho_v^2 - \varphi(\rho)\cdot\varphi_1(u,v))\xi^2 + 2f(\rho)\cdot\rho_u\rho_v\xi\eta + (-f(\rho)\cdot\rho_u^2 - \varphi(\rho)\cdot\varphi_2(u,v))\eta^2 \le 0 .$$

В точке (u_1,v_1) максимума функции $\rho(u,v)$ имеем: $d^2\rho = \rho_{uu}du^2 + 2\rho_{uv}dudv + \rho_{vv}dv^2 \le 0$, $-\rho_{11} = -\rho_{uu} \ge 0$, $-\rho_{22} = -\rho_{vv} \ge 0$.

Исследуем выражение:

$\rho_{11}[-f(\rho)\rho_v^2 - \varphi(\rho)\cdot\varphi_1(u,v)] + 2\rho_{12}\cdot f(\rho)\cdot\rho_u\rho_v + \rho_{22}[-f(\rho)\cdot\rho_u^2 - \varphi(\rho)\cdot\varphi_2(u,v)]$, которое представляет собой часть уравнения (2).

В точке (u_1,v_1) данное выражение принимает вид: $-\rho_{11}\varphi(\rho)\cdot\varphi_1(u,v) - \rho_{22}\varphi(\rho)\cdot\varphi_2(u,v)$ и является неотрицательным, так как $-\rho_{11} \ge 0$, $-\rho_{22} \ge 0$, а $\varphi(\rho)$, $\varphi_1(u,v)$, $\varphi_2(u,v)$ положительны по условию.

Итак, $-\rho_{11}\varphi(\rho)\cdot\varphi_1(u,v) - \rho_{22}\varphi(\rho)\cdot\varphi_2(u,v) \ge 0$.

Уравнение (2) в точке (u_1,v_1) представляет собой следующее равенство:

$$\rho_{11}\rho_{22} - \rho_{12}^2 - \rho_{11}\varphi(\rho)\cdot\varphi_1(u,v) - \rho_{22}\varphi(\rho)\cdot\varphi_2(u,v) + D(u,v,\rho,\rho_u,\rho_v) =$$
$$= \psi(u,v,\rho)\cdot D_1(u,v,\rho,\rho_u,\rho_v).$$

Здесь $\rho_{11}\rho_{22} - \rho_{12}^2 > 0$, так как $d^2\rho$ в (u_1,v_1) определена.

Тогда $\rho_{11}\rho_{22} - \rho_{12}^2 - \rho_{11}\varphi(\rho)\cdot\varphi_1(u,v) - \rho_{22}\varphi(\rho)\cdot\varphi_2(u,v)$ есть сумма неотрицательных слагаемых уравнения (2) в точке (u_1,v_1). Это означает, что $\psi(u,v,\rho)\cdot D_1(u,v,\rho,0,0) - D(u,v,\rho,0,0) \ge 0$, т.е. $\psi(u,v,\rho) \ge \dfrac{D(u,v,\rho,0,0)}{D_1(u,v,\rho,0,0)} = \psi_0$.

Итак, в точке максимума функции $\rho = \rho(u,v)$:

$$\psi(u,v,\rho) \ge \psi_0 \qquad (3)$$

Примем допущение, что $\rho(u,v) > \rho_2$, тогда по условию теоремы $\psi(u,v,\rho) < \psi_0$, что противоречит (3). Следовательно, $\rho(u_1,v_1) \le \rho_2$. В этом случае $\rho(u,v) \le \rho(u_1,v_1) \le \rho_2$, т.е. $\rho(u,v) \le \rho_2$. Тем самым оценка сверху на решение $\rho(u,v)$ уравнения (2) получена.

Оценим теперь решение $\rho(u,v)$ уравнения (2) снизу.

Пусть (u_0,v_0) – точка минимума $\rho(u,v)$, тогда $d^2\rho \geq 0$, следовательно, $\rho_{11}\rho_{22}-\rho_{12}^2>0$.

Отрицательная эллиптичность уравнения (2) означает, что квадратичная форма $T(\Phi,\rho)=(\rho_{22}-\varphi(\rho)\cdot\varphi_1(u,v))\xi^2+2\rho_{12}\xi\eta+(\rho_{11}-\varphi(\rho)\cdot\varphi_2(u,v))\eta^2\leq 0$ [2].

Исследуем выражение:

$$\rho_{11}(\rho_{22}-f(\rho)\rho^2{}_v-\varphi(\rho)\cdot\varphi_1(u,v))+2(\rho_{12}-f(\rho)\rho_u\rho_v)\rho_{12}+\rho_{22}(\rho_{11}-f(\rho)\rho^2{}_u-\varphi(\rho)\cdot\varphi_2(u,v)).$$

В точке (u_0,v_0) это выражение принимает вид:

$$\rho_{11}(\rho_{22}-\varphi(\rho)\cdot\varphi_1(u,v))-2\rho^2{}_{12}+\rho_{22}(\rho_{11}-\varphi(\rho)\cdot\varphi_2(u,v)).$$

Определим знак данного выражения.

В (u_0,v_0) $d^2\rho\geq 0$, поэтому $\rho_{11}\geq 0,\rho_{22}\geq 0$; $\rho_{22}-\varphi(\rho)\cdot\varphi_1(u,v)\leq 0$, $\rho_{11}-\varphi(\rho)\cdot\varphi_2(u,v)\leq 0$ вследствие того, что $T(\Phi,\rho)\leq 0$, $-2\rho^2{}_{12}\leq 0$, поэтому

$\rho_{11}(\rho_{22}-\varphi(\rho)\cdot\varphi_1(u,v))-2\rho^2{}_{12}+\rho_{22}(\rho_{11}-\varphi(\rho)\cdot\varphi_2(u,v))\leq 0$, или

$$\rho_{11}\rho_{22}-\rho^2{}_{12}+\rho_{11}\rho_{22}-\rho^2{}_{12}-\rho_{11}\varphi(\rho)\cdot\varphi_1(u,v)-\rho_{22}\varphi(\rho)\cdot\varphi_2(u,v)\leq 0.$$

Так как $\rho_{11}\rho_{22}-\rho^2{}_{12}>0$, то

$$\rho_{11}\rho_{22}-\rho^2{}_{12}-\rho_{11}\varphi(\rho)\cdot\varphi_1(u,v)-\rho_{22}\varphi(\rho)\cdot\varphi_2(u,v)\leq 0. \quad (4)$$

Уравнение (2) в точке (u_0,v_0) преобразуется:

$$\rho_{11}\rho_{22}-\rho_{12}^2-\rho_{11}\varphi(\rho)\cdot\varphi_1(u,v)-\rho_{22}\varphi(\rho)\cdot\varphi_2(u,v)+D(u,v,\rho,0,0)=$$
$$=\psi(u,v,\rho)\cdot D_1(u,v,\rho,0,0).$$

Из (14) имеем $\psi(u,v,\rho)\cdot D_1(u,v,\rho,0,0)-D(u,v,\rho,0,0)\leq 0$.

Отсюда $\psi(u,v,\rho)\leq\dfrac{D(u,v,\rho,0,0)}{D_1(u,v,\rho,0,0)}=\psi_0$.

Таким образом,

$$\psi(u,v,\rho)\leq\psi_0 \quad (5)$$

Если предположить, что $\rho(u_0,v_0)<\rho_1$, то по условию теоремы $\psi(u,v,\rho)>\psi_0$, что противоречит (5). Это означает, что $\rho_1\leq\rho(u_0,v_0)\leq\rho(u,v)$, или $\rho_1\leq\rho(u,v)$, т.е. оценка снизу в $C^0(S_1^2)$ для решения $\rho=\rho(u,v)$ уравнения (2) получена.

Теорема доказана: $\rho_1\leq\rho(u,v)\leq\rho_2$.

Следствие 1. Уравнение (1) – частный случай уравнения (2) при $\varphi(\rho)=\rho>0$, $f(\rho)=\dfrac{2}{\rho}>0$, $\varphi_1(u,v)=\sin^2 u>0$, $\varphi_2(u,v)=1>0$, $\psi(u,v,\rho)=K(u,v,\rho)$, $D(u,v,\rho,\rho_u,\rho_v)=2\rho_u^2\sin^2 u+2\rho_v^2+\rho^2\sin^2 u)$,

$$D_1(u,v,\rho,\rho_u,\rho_v)=\frac{\left(\rho_u^2\sin^2 u+\rho_v^2+\rho^2\sin^2 u\right)^2}{\sin^2 u}.$$

Далее: $\psi_0=\dfrac{D(u,v,\rho,0,0)}{D_1(u,v,\rho,0,0)}=\dfrac{\rho^2\sin^2 u}{\rho^4\sin^4 u}\sin^2 u=\dfrac{1}{\rho^2}$.

Если $K(u,v,\rho)>\dfrac{1}{\rho^2}=\psi_0$ при $\rho<\rho_1$, $K(u,v,\rho)<\dfrac{1}{\rho^2}=\psi_0$ при $\rho>\rho_2$, то $F:\rho=\rho(u,v)$ расположена между концентрическими сферами $S_{\rho_1}^2$ и $S_{\rho_2}^2$ ($\rho_1<\rho_2$), т.е. имеет место оценка $\rho(u,v)$ в метрике сферы S_1^2: $\rho_1\leq\rho(u,v)\leq\rho_2$.

Как видно, следствие теоремы полностью совпадает с результатом, полученным в [1].

Следствие 2. Задача восстановления регулярной выпуклой гомеоморфной сфере S_1^2 поверхности F с заданной функцией гауссовой кривизны в трехмерном гиперболическом пространстве H^3 ($K_{H^3} = const < 0$) в аналитическом аспекте приводит к исследованию дифференциального уравнения на сфере S_1^2 как двумерном многообразии следующего вида [3]:

$$\begin{aligned}&\rho_{11}\rho_{22} - \rho_{12}^2 - \rho_{11}(2cth\rho \cdot \rho_v^2 + sh\rho \cdot ch\rho) + 2\rho_{12}\rho_u\rho_v cth\rho - \rho_{22}(2cth\rho \cdot \rho_u^2 + sh\rho \cdot ch\rho\cos^2 v) - \\ &-(\rho_v^2\cos^2 v + \frac{\rho_u^2}{\cos v})^2 + 2\rho_u^2 + 2\rho_v^2\cos^2 v + sh^2\rho\cos^2 v = \\ &= K_{\text{int}}(u,v,\rho)\frac{(\rho_u^2 + \rho_v^2\cos^2 v + sh^2\rho \cdot \cos^2 v)^2}{\cos^2 v}.\end{aligned} \tag{6}$$

Уравнение (6) – отрицательно эллиптично при $K_{\text{int}}(u,v,\rho) > -1$; атлас S_1^2 выбран так, что в каждой карте локальные координаты u,v удовлетворяют условию: $\cos v \ge \eta > 0$. По-прежнему ρ_{11}, ρ_{12}, ρ_{22} – вторые ковариантные производные $\rho = \rho(u,v)$ относительно метрики S_1^2. Уравнение $\rho = \rho(u,v)$ определяет поверхность F, в каждой точке которой гауссова кривизна совпадает с заданной в $H^3 \setminus \{O\}$ функций пространства $K_{\text{int}}(u,v,\rho)$, O – фиксированная точка H^3, S_1^2 имеет центр в точке O.

Уравнение (6) есть частный случай уравнения (2):

$\varphi(\rho) = sh\rho ch\rho > 0$, $f(\rho) = 2cth\rho > 0$, $\varphi_1(u,v) = 1 > 0$, $\varphi_2(u,v) = \cos^2 v > 0$,

$$D(u,v,\rho,\rho_u,\rho_v) = 2\rho_u^2 + 2\rho_v^2\cos^2 v + sh^2\rho\cos^2 v - (\rho_v^2\cos^2 v + \frac{\rho_u^2}{\cos v})^2,$$

$$D_1(u,v,\rho,\rho_u,\rho_v) = \frac{(\rho_u^2 + \rho_v^2\cos^2 v + sh^2\rho \cdot \cos^2 v)^2}{\cos^2 v},$$

следовательно, $D(u,v,\rho,0,0) = sh^2\rho\cos^2 v$, $D_1(u,v,\rho,0,0) = \dfrac{(sh^2\rho \cdot \cos^2 v)^2}{\cos^2 v} = sh^4\rho \cdot \cos^2 v$,

а $\psi_0 = \dfrac{D(u,v,\rho,0,0)}{D_1(u,v,\rho,0,0)} = \dfrac{1}{sh^2\rho}$.

Если $K_{\text{int}} > \dfrac{1}{sh^2\rho} = \psi_0$ при $\rho < \rho_1$, $K_{\text{int}} < \dfrac{1}{sh^2\rho} = \psi_0$ при $\rho > \rho_2$, то решение $\rho(u,v)$ уравнения (6) имеет оценки $\rho(u,v)$ в $C^0(S_1^2)$: $\rho_1 \le \rho(u,v) \le \rho_2$.

С геометрической точки зрения это означает, что поверхность $F: \rho = \rho(u,v)$ лежит между концентрическими сферами с центром O и радиусами ρ_1 и ρ_2 соответственно ($\rho_1 < \rho_2$).

Результат следствия 2 аналогичен результату работы [3].

1. Верещагин, Б.М. Восстановление замкнутой выпуклой поверхности по данной функции гауссовой кривизны // Вопросы глобальной геометрии. Сб. науч. трудов ЛГПИ им. А.И. Герцена. – Л., 1979. – С. 7-12.

2. Филимонова, А.П., Юрьева, Т.А. Единственность решения уравнения Монжа – Ампера некоторого класса на сфере как двумерном многообразии // Международный научно-исследовательский журнал. – 2016. – № 6-5 (48). – С. 107-110.

3. Филимонова, А.П. Оценка в метрике C^2 и единственность выпуклой гомеоморфной сфере поверхности с заданной гауссовой кривизной в H^3 // Вопросы глобальной геометрии. Сб. науч. трудов ЛГПИ им. А.И. Герцена. – Л., 1979. – С. 64-68.