УДК 510.2

Му Цзинюй, Т.В. Труфанова

АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

В статье проводится решение нелинейного уравнения в частных производных третьего порядка – уравнения Кортевега – де Фриза. Точное аналитическое решение найдено при помощи использования подстановки Коула – Хопфа. Решение уравнения Кортевега – де Фриза ищем в виде бегущей волны.

Ключевые слова: волновые процессы, уравнение Кортевега – де Фриза, преобразование Коула – Хопфа, нелинейное уравнение, уединенная волна, или солитон.

ANALYTICAL METHOD OF THE DECISION NONLINEAR WAVE EQUATION

In article the decision of the nonlinear equation in private derivatives of the third order – the equations of Kortevega – de Friza is passed. The exact analytical solution is found by means of use of substitution of Cole – Hopfa. We look for the solution of the equation of Kortevega - de Friza in the form of the running wave.

Key words: wave processes, the equation of Kortevega – de Friza, Cole – Hopfa's transformation, the nonlinear equation, a lonely wave or a soliton.

Нелинейные волновые процессы различной физической природы имеют большое значение для развития науки и техники. При помощи таких уравнений можно описать процессы в гидродинамике, в физике твердого тела, в физике плазмы и т.д. В линейных математических моделях, которые являются приближениями при описании различных процессов, существуют общие аналитические методы решений уравнений в частных производных [1]. Для нелинейных моделей общих методов решения задач в настоящее время не существует. Некоторые нелинейные задачи удается решить точными аналитическими методами при помощи различных замен и преобразований переменных.

Рассмотрим волновое уравнение с учетом дисперсии и нелинейности

$$u_t + uu_x + \beta u_{xxx} = 0, \tag{1}$$

его называют уравнением Кортевега – де Фриза (КдФ) [2, 4].

Сделаем подстановку Коула – Хопфа:

$$\mathrm{u} = 12\beta \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln F. \tag{2}$$

Пересчитаем все производные, входящие в уравнение (1):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 12\beta \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial t} \ln F,\ \frac{\partial u}{\partial x} = 12\beta \frac{\partial^3}{\partial x^3} \ln F,\ \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 12\beta \frac{\partial^5}{\partial x^5} \ln F.$$

Подставляя в (1), получаем:

$$12\beta\frac{\partial^3}{\partial x^2\partial t}\ln F+12\beta\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln F\cdot 12\beta\frac{\partial^3}{\partial x^3}\ln F+\beta\cdot 12\beta\frac{\partial^5}{\partial x^5}\ln F=0.$$

Нетрудно заметить, что это уравнение можно представить в виде, удобном для интегрирования:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2}{\partial x\partial t}\ln F\right)+6\beta\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln F\right)^2+\beta\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^4}{\partial x^4}\ln F\right)=0.$$

Интегрируя по x, получаем

$$\frac{\partial^2}{\partial x\partial t}\ln F+6\beta\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln F\right)^2+\beta\cdot\frac{\partial^4}{\partial x^4}\ln F=C(t), \tag{3}$$

где C(t) – произвольная функция.

Предположим сначала, что C(t) =0 [5].

Пересчитаем все производные, входящие в уравнение (3):

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{F}\cdot\frac{\partial F}{\partial x}\right)=\frac{1}{F^2}\frac{\partial F}{\partial t}\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{1}{F}\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial t};\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln F=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{F}\cdot\frac{\partial F}{\partial x}\right)=-\frac{1}{F^2}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2+\frac{1}{F}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2};$$

$$\frac{\partial^3}{\partial x^3}\ln F=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{1}{F^2}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2+\frac{1}{F}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)=(-1)\left(\left(-2F^{-3}\right)\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2+\frac{1}{F^2}\cdot 2\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)+$$

$$+\left(-\frac{1}{F^2}\right)\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+\frac{1}{F}\frac{\partial^3 F}{\partial x^3}=\frac{2}{F^3}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^3-\frac{3}{F^2}\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+\frac{1}{F}\frac{\partial^3 F}{\partial x^3};$$

$$\frac{\partial^4}{\partial x^4}\ln F=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2}{F^3}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^3-\frac{3}{F^2}\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+\frac{1}{F}\frac{\partial^3 F}{\partial x^3}\right)=2\cdot\left((-3)F^{-4}\right)\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^3+$$

$$+\frac{2}{F^3}\cdot\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 3\cdot\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}-3\left(-2F^{-3}\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\cdot\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2+\frac{1}{F^2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)\right)+$$

$$+\left(-\frac{1}{F^2}\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{\partial^3 F}{\partial x^3}+\frac{1}{F}\frac{\partial^4 F}{\partial x^4}\right)=-\frac{6}{F^4}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^4+\frac{12}{F^3}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}-\frac{3}{F^2}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)^2-$$

$$-\frac{4}{F^2}\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{\partial^3 F}{\partial x^3}+\frac{1}{F}\frac{\partial^4 F}{\partial x^4}.$$

Подставляя найденные производные в (3), получаем уравнение:

$$-\frac{1}{F^2}\frac{\partial F}{\partial t}\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{1}{F}\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial t}+6\beta\left(\frac{1}{F^4}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^4-\frac{2}{F^3}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+\frac{1}{F^2}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)^2\right)+$$

$$+\beta\left(-\frac{6}{F^4}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^4+\frac{12}{F^3}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}-\frac{3}{F^2}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)^2-\frac{4}{F^2}\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial^3 F}{\partial x^3}+\frac{1}{F}\frac{\partial^4 F}{\partial x^4}\right)=0.$$

Проделав простейшие преобразования, запишем это уравнение в виде:

$$F\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial t}-\frac{\partial F}{\partial t}+3\beta\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)^2-3\beta\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial^3 F}{\partial x^3}-\beta\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial^3 F}{\partial x^3}+F\frac{\partial^4 F}{\partial x^4}=0.$$

Для функции F(x,t) получаем уравнение в частных производных четвертого порядка:

$$F\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial t}+\beta\frac{\partial^3 F}{\partial x^3}\right)-\frac{\partial F}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial t}+\beta\frac{\partial^3 F}{\partial x^3}\right)+3\beta\left(\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)^2-\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial^3 F}{\partial x^3}\right)=0. \tag{4}$$

Допустим, что

$$\frac{\partial F}{\partial t}+\beta\frac{\partial^3 F}{\partial x^3}=0;\ \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)^2-\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial^3 F}{\partial x^3}=0,$$

второе уравнение соответствует:

$$\begin{vmatrix}\frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\\ \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} & \frac{\partial^3 F}{\partial x^3}\end{vmatrix}=0.$$

Обозначим $\frac{\partial F}{\partial x}(x,t)=y_t(x)$, где t – параметр.

То есть $\begin{vmatrix}y_t & y_t'\\ y_t' & y_t''\end{vmatrix}=0.$

Это значит, что y_t' и y_t функционально зависимы.

Следовательно, $y_t'=Cy_t$, где C – функция от t.

Решим это уравнение и получим: $y_t=\frac{\partial F}{\partial x}(x,t)=\tilde{C}e^{cx}$, где $\tilde{C}$ и C не зависят от x.

Интегрируя второй раз, получаем:

$$F(x,t)=e^{c_1(t)x+c_2(t)}+c_3(t). \qquad (5)$$

Допустим, что $c_3(t)\equiv 1, c_1(t)=-\alpha, c_2(t)=\alpha s+\alpha^3\beta t.$

Подставим в (5), находим:

$$F=1+e^{-\alpha(x-s)+\alpha^3\beta t}=1+f, \qquad (6)$$

где $\theta=\alpha(x-s)+\alpha^3\beta t, f=e^{-\theta}.$

Таким образом, функция (6) является решением уравнения (4). Вычисляя производные

$$\frac{\partial F}{\partial x}=(-\alpha)e^{-\alpha(x-s)+\alpha^3\beta t}=-\alpha f, \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=\alpha^2 f$$

и подставляя в (2), находим решение уравнения КдФ:

$$\mathrm{u}=12\beta\left(-\frac{1}{F^2}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2+\frac{1}{F}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)=\frac{12\beta}{F^2}\left(-(-\alpha f)^2+(1+f)\cdot\alpha^2 f\right)=\frac{12\beta\alpha^2 f}{(1+f)^2}=3\beta\alpha^2\left(\frac{2e^{-\frac{\theta}{2}}}{1+e^{-\theta}}\right)^2=$$

$$=3\beta\alpha^2\left(\frac{e^{\frac{\theta}{2}}+e^{-\frac{\theta}{2}}}{2}\right)^{-2}=3\beta\alpha^2 ch^{-2}\left(\frac{\theta}{2}\right)=3\beta\alpha^2 ch^{-2}\left(\frac{\alpha(x-s)-\alpha^3\beta t}{2}\right),$$

или

$$\mathrm{u}=Ach^{-2}\left(\frac{x-s-\nu t}{\Delta}\right), \qquad (7)$$

где $A=3\beta\alpha^2, \Delta=2\alpha, \nu=\alpha^2\beta.$ Это решение уравнения (1) называют уединенной волной, или солитоном [2, 3].

Найдем более сложное решение уравнения КдФ. Рассмотрим взаимодействие двух солитонов. Воспользуемся методом возмущений в теории взаимодействия.

Для этого представим функцию F в виде разложения в ряд:

$$F=1+\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k F^{(k)} \tag{8}$$

по параметру ε.

Подставим (8) в (4), получаем:

$$\left(1+\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k F^{(k)}\right)\left(\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F^{(k)}}{\partial t}+\beta\frac{\partial^3 F^{(k)}}{\partial x^3}\right)\right)-\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k \frac{\partial F^{(k)}}{\partial x}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F^{(k)}}{\partial t}+\beta\frac{\partial^3 F^{(k)}}{\partial x^3}\right)+$$
$$+3\beta\left(\left(\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k\frac{\partial^2 F^{(k)}}{\partial x^2}\right)^2-\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k\frac{\partial F^{(k)}}{\partial x}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k\frac{\partial^3 F^{(k)}}{\partial x^3}\right)=0.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε к нулю, получаем систему уравнений:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F^{(1)}}{\partial t}+\beta\frac{\partial^3 F^{(1)}}{\partial x^3}\right)=0; \tag{9}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F^{(2)}}{\partial t}+\beta\frac{\partial^3 F^{(2)}}{\partial x^3}\right)+F^{(1)}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F^{(1)}}{\partial t}+\beta\frac{\partial^3 F^{(1)}}{\partial x^3}\right)-\frac{\partial F^{(1)}}{\partial x}\left(\frac{\partial F^{(1)}}{\partial t}+\beta\frac{\partial^3 F^{(1)}}{\partial x^3}\right)+$$
$$+3\beta\left(\left(\frac{\partial^2 F^{(1)}}{\partial x^2}\right)^2-\frac{\partial F^{(1)}}{\partial x}\cdot\frac{\partial^3 F^{(1)}}{\partial x^3}\right)=0. \tag{10}$$

и т.д.

Пусть $F^{(1)}=f_1+f_2$, где $f_1=e^{-\alpha_i(x-s_i)+\alpha_i^3\beta t}$, $i=1,2,$ т.е. сумма двух экспонент, порождающих солитон.

Вычисляем производные, входящие в уравнение (9):

$$\frac{\partial F^{(1)}}{\partial t}=\alpha_1^3\beta f_1+\alpha_2^3\beta f_2,\ \frac{\partial F^{(1)}}{\partial x}=-\alpha_1 f_1-\alpha_2 f_2,\ \frac{\partial^2 F^{(1)}}{\partial x^2}=\alpha_1^2 f_1+\alpha_2^2 f_2,\ \frac{\partial^3 F^{(1)}}{\partial x^3}=-\alpha_1^3 f_1-\alpha_2^3 f_2.$$

Аналогично для уравнения (10):

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F^{(2)}}{\partial t}+\beta\frac{\partial^3 F^{(2)}}{\partial x^3}\right)=-3\beta\left(\left(\frac{\partial^2 F^{(1)}}{\partial x^2}\right)^2-\frac{\partial F^{(1)}}{\partial x}\cdot\frac{\partial^3 F^{(1)}}{\partial x^3}\right)=$$
$$=3\beta\left(-\left(\alpha_1^2 f_1+\alpha_2^2 f_2\right)^2+\left(-\alpha_1 f_1-\alpha_2 f_2\right)\cdot\left(-\alpha_1^3 f_1-\alpha_2^3 f_2\right)\right)=3\beta\alpha_1\alpha_2\left(\alpha_1-\alpha_2\right)^2 f_1 f_2. \tag{11}$$

Решение уравнения (11) будем искать в виде $F^{(2)}=Bf_1f_2$, где B – некоторая постоянная, которую надо найти.

Дифференцируя, находим:

$$\frac{\partial F^{(2)}}{\partial t}=B\left(\alpha_1^3\beta f_1 f_2+f_1\cdot\alpha_2^3\beta f_2\right)=B\left(\alpha_1^3+\alpha_2^3\right)\beta f_1 f_2;$$
$$\frac{\partial F^{(2)}}{\partial x}=-B\left(\alpha_1+\alpha_2\right)f_1 f_2;\ \frac{\partial^2 F^{(2)}}{\partial x^2}=B\left(\alpha_1+\alpha_2\right)^2 f_1 f_2;$$
$$\frac{\partial^3 F^{(2)}}{\partial x^3}=-B\left(\alpha_1+\alpha_2\right)^3 f_1 f_2;\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F^{(2)}}{\partial t}+\beta\frac{\partial^3 F^{(2)}}{\partial x^3}\right)= \tag{12}$$
$$=-\left(\alpha_1+\alpha_2\right)\left(B\left(\alpha_1^3\beta f_1 f_2+f_1\alpha_2^3\beta f_2\right)-B\beta\left(\alpha_1+\alpha_2\right)^3 f_1 f_2\right)=3B\alpha_1\alpha_2\left(\alpha_1+\alpha_2\right)^2 f_1 f_2.$$

Сравнивая (11) и (12), получаем:

$$B=\frac{\left(\alpha_1-\alpha_2\right)^2}{\left(\alpha_1+\alpha_2\right)^2}.$$

Допустим, $F^{(k)}=0, k\geq 3,$ т.е. $F^{(k)}=1+\varepsilon F^{(1)}+\varepsilon^2 F^{(2)}.$

Подставляя F в (4), получаем:

$$\left(1+\varepsilon F^{(1)}+\varepsilon^2 F^{(2)}\right)\cdot\varepsilon^2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F^{(2)}}{\partial t}+\beta\frac{\partial^3 F^{(2)}}{\partial x^3}\right)-\left(\varepsilon\frac{\partial F^{(1)}}{\partial x}+\varepsilon^2\frac{\partial F^{(2)}}{\partial x}\right)\cdot\varepsilon^2\left(\frac{\partial F^{(2)}}{\partial t}+\beta\frac{\partial^3 F^{(2)}}{\partial x^3}\right)+$$

$$+3\beta\left(\left(\varepsilon\frac{\partial^2 F^{(1)}}{\partial x^2}+\varepsilon^2\frac{\partial^2 F^{(2)}}{\partial x^2}\right)^2-\left(\varepsilon\frac{\partial F^{(1)}}{\partial x}+\varepsilon^2\frac{\partial F^{(2)}}{\partial x}\right)\cdot\left(\varepsilon\frac{\partial^3 F^{(1)}}{\partial x^3}+\varepsilon^2\frac{\partial^3 F^{(2)}}{\partial x^3}\right)\right)=0.\left(\frac{\partial F^{(1)}}{\partial t}+\beta\frac{\partial^3 F^{(1)}}{\partial x^3}=0.\right)$$

После вычисления коэффициентов заметим, что при ε^3:

$$F^{(1)}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F^{(2)}}{\partial t}+\beta\frac{\partial^3 F^{(2)}}{\partial x^3}\right)-\frac{\partial F^{(1)}}{\partial x}\left(\frac{\partial F^{(2)}}{\partial t}+\beta\frac{\partial^3 F^{(2)}}{\partial x^3}\right)+3\beta\left(2\frac{\partial^2 F^{(1)}}{\partial x^2}\frac{\partial^2 F^{(2)}}{\partial x^2}-\left(\frac{\partial F^{(1)}}{\partial x}\frac{\partial^3 F^{(2)}}{\partial x^3}+\frac{\partial F^{(2)}}{\partial x}\frac{\partial^3 F^{(1)}}{\partial x^3}\right)\right)=$$

$$=\left(f_1+f_2\right)\left(3B\beta\alpha_1\alpha_2\left(\alpha_1+\alpha_2\right)^2 f_1f_2\right)-\left(-\alpha_1 f_1-\alpha_2 f_2\right)\left(-3B\beta\alpha_1\alpha_2\left(\alpha_1+\alpha_2\right)f_1f_2\right)+$$

$$+3\beta\left(2\left(\alpha_1^2 f_1+\alpha_2^2 f_2\right)\cdot B\left(\alpha_1+\alpha_2\right)^2 f_1f_2-\left(-\alpha_1 f_1-\alpha_2 f_2\right)\left(-B\left(\alpha_1+\alpha_2\right)^3\right)f_1f_2\right)-$$

$$-\left(-B\left(\alpha_1+\alpha_2\right)f_1f_2\right)\left(-\alpha_1^3 f_1-\alpha_2^3 f_2\right)=0;$$

при ε^4:

$$F^{(2)}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F^{(2)}}{\partial t}+\beta\frac{\partial^3 F^{(2)}}{\partial x^3}\right)-\frac{\partial F^{(2)}}{\partial x}\left(\frac{\partial F^{(2)}}{\partial t}+\beta\frac{\partial^3 F^{(2)}}{\partial x^3}\right)+3\beta\left(\left(\frac{\partial^2 F^{(2)}}{\partial x^2}\right)^2-\frac{\partial F^{(2)}}{\partial x}\frac{\partial^3 F^{(2)}}{\partial x^3}\right)=$$

$$=\left(F^{(2)}\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\partial F^{(2)}}{\partial x}\right)\left(-3B\alpha_1\alpha_2\left(\alpha_1+\alpha_2\right)f_1f_2\right)=0.$$

Когда $k\geq 5$, коэффициенты содержат множители $F^{(3)}, F^{(4)}$ и т.д., поэтому все равны 0. Таким образом, мы доказали, что ряд (8) содержит только функции $F^{(1)}$ и $F^{(2)}$. Следовательно, остаются только уравнения (9) и (10).

Поэтому функция

$F=1+\varepsilon F^{(1)}+\varepsilon^2 F^{(2)}$, где $F^{(1)}=f_1+f_2=e^{-\alpha_1(x-s_1)+\alpha_1^3\beta t}+e^{-\alpha_2(x-s_2)+\alpha_2^3\beta t}$, $F^{(2)}=\dfrac{\left(\alpha_1-\alpha_2\right)^2}{\left(\alpha_1+\alpha_2\right)^2}f_1f_2$, ε – любое число, оно действительно является решением уравнения(4).

Подставляя F в преобразование Коула – Хопфа (2), получаем точное решение уравнения КдФ.

Таким образом, в данной статье подробно изложен аналитический метод нахождения решения нелинейного волнового уравнения в виде уединенной волны, а также построено более сложное решение, представляющее взаимодействие двух солитонов.

1. Труфанова, Т.В. Методы решения уравнений математической физики [Электронный ресурс] : учебное пособие: доп. УМО РФ / Т. В. Труфанова, А. Г. Масловская, Е. М. Веселова. – Благовещенск: Изд-во АмГУ, 2015. – 196 с. – Б. 1
2. Мартинсон, Л.К., Малов, Ю.И. Дифференциальные уравнения математической физики. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002. – 368 с.
3. Филлипов, А.Т. Многоликий солитон. – М.: Гл. ред. физико-математической литературы изд-ва «Наука», 1990. – 288 с.
4. 王元明数学物理方程与特殊函数（第三版）高等教育出版社 2003.
5. 丁大军KdV方程的另一种可积离散化 2011.