УДК 519.8

Н.Н. Двоерядкина, А.М. Попова

АНАЛИЗ ОПТИМАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ НА ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТЬ

В статье рассматривается решение оптимизационной экономической задачи методами линейного программирования. Приводится подробный анализ результата решения.

Ключевые слова: оптимизация, линейное программирование, двойственная оценка, устойчивость двойственных оценок.

THE ANALYSIS OF THE OPTIMAL SOLUTIONS TO THE ECONOMIC PROBLEMS OF SENSITIVITY

In this article the solution of the optimization problem of economic methods of linear programming. A detailed analysis of the solutions.

Keywords: optimization, linear programming, the dual assessment; steadiness of dual assessments.

Развитие современного общества характеризуется усложнением организационной структуры производства, высокими требованиями к методам планирования и хозяйственного руководства. В этих условиях только научный подход к экономической жизни общества позволит обеспечить высокие темпы развития народного хозяйства.

Новейшие достижения математики и современной вычислительной техники находят все более широкое применение в экономических исследованиях и планировании. Особенно успешно развиваются методы оптимального планирования, основу которых составляет линейное программирование.

Линейное программирование – раздел математики, в котором изучаются методы исследования и отыскания экстремальных значений линейной функции, на неизвестные которой наложены линейные ограничения.

Математическое выражение целевой функции и системы ограничений называется математической моделью задачи линейного программирования.

В общем виде задача линейного программирования формулируется следующим образом.

Дана линейная функция $F = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$ и система m линейных уравнений и неравенств с n переменными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n \le b_k \\ a_{k+1,1}x_1 + a_{k+1,2}x_2 + \ldots + a_{k+1,n}x_n = b_{k+1} \\ a_{k+2,1}x_1 + a_{k+2,2}x_2 + \ldots + a_{k+2,n}x_n = b_{k+2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Необходимо найти такое неотрицательное решение системы $X=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, при котором линейная функция F принимает оптимальное (максимальное или минимальное) значение.

Система называется системой ограничений, а функция F – целевой функцией.

Если система ограничений состоит лишь из одних неравенств, то говорят, что задача линейного программирования представлена в стандартной форме. Если система ограничений содержит только уравнения, то задачу линейного программирования называют канонической.

Любая задача линейного программирования может быть сведена к канонической путем введения балансовых переменных. Балансовые переменные x вводятся в каждое неравенство. Если знак неравенства «≤», то балансовая переменная вводится со знаком плюс, если знак неравенства «≥», то минус.

Для решения задач линейного программирования используют графический и симплексный методы.

С каждой задачей линейного программирования можно определенным образом сопоставить некоторую другую задачу, называемую двойственной, или сопряженной по отношению к исходной, или прямой. Эти две задачи взаимосвязаны и образуют пару задач, именуемую двойственной парой.

Для составления математической модели двойственной задачи необходимо:

каждому неравенству системы ограничений исходной задачи поставить в соответствие переменную y_i. Число переменных в двойственной задаче равно числу ограничений в системе исходной задачи, а число ограничений в системе двойственной задачи – числу переменных в исходной задаче;

составить целевую функцию, коэффициентами при неизвестных в целевой функции двойственной задачи являются свободные члены в системе условий исходной задачи;

составить систему ограничений, коэффициенты системы ограничений двойственной задачи образуют транспонированную матрицу коэффициентов системы ограничений исходной задачи. Свободными членами системы ограничений являются коэффициенты целевой функции исходной задачи;

знаки неравенств поменять на противоположные.

Связь между оптимальными решениями пары взаимно двойственных задач устанавливается с помощью основных теорем двойственности [2].

Теорема 1. Если одна из двойственных задач имеет конечное оптимальное решение, то другая также имеет конечное оптимальное решение, при этом оптимальные значения их целевых линейных функций равны, т.е. выполняется равенство:

$$F_{\max} = L_{\min}.$$

Если одна из двойственных задач неразрешима ввиду того, что одна из целевых функций стремится к бесконечности, то другая задача не имеет допустимых решений.

Теорема 2. В оптимальном решении для каждой пары сопряженных условий положительным ненулевым компонентам оптимального решения одной из взаимно двойственных задач соответствуют нулевые компоненты оптимального решения другой задачи, т.е. выполняются следующие соотношения: если одно из них выполняется как строгое равенство, то другое – как строгое неравенство, и наоборот, т.е.:

если $\sum_j a_{ij} \cdot x_j^* = b_i$, то $y_i^* > 0$, если $\sum_j a_{ij} \cdot x_j^* < b_i$, то $y_i^* = 0$, если $x_j^* > 0$, то $\sum_i a_{ij} \cdot y_i^* = c_j$, если $x_j^* = 0$, то $\sum_i a_{ij} \cdot y_i^* > c_j$.

Рассмотрим использование методов линейного программирования на примере. Предприятие выпускает два вида продукции: Изделие 1 и Изделие 2. На изготовление единицы Изделия 1 требуется затратить 3 кг сырья первого типа, 3 кг сырья второго типа, 1 кг сырья третьего типа. На изготовление единицы Изделия 2 требуется затратить 4 кг сырья первого типа, 1 кг сырья второго, 5 кг сырья третьего. Производство обеспечено сырьем каждого типа в количестве 600 кг, 357 кг, 600 кг соответственно. Рыночная цена единицы Изделия 1 составляет 42 тыс. рублей, а единицы Изделия 2 – 26 тыс. рублей.

Определить оптимальный план выпуска продукции, двойственные оценки сырья каждого типа, проанализировать чувствительность каждого параметра.

Составим математическую модель задачи.

Обозначим: x_1 – количество Изделий 1, x_2 – количество Изделий 2, F – функция прибыли.

Количество изделий не может быть отрицательным по смыслу задачи. Так как значение стоимости от единицы каждого вида изделия задано в условии задачи, то целевая функция – функция прибыли – имеет вид: $F(x) = 42 \cdot x_1 + 26 \cdot x_2$

Производство обеспечено сырьем трех типов, но в ограниченном количестве.

Математическая модель задачи имеет вид:

$$F(x) = 42 \cdot x_1 + 26 \cdot x_2 \to \max$$

при ограничениях сырья

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \le 600, & \textit{ограничение по } 1 \textit{ типу} \\ 3x_1 + x_2 \le 357, & \textit{ограничение по } 2 \textit{ типу} \\ x_1 + 5x_2 \le 600, & \textit{ограничение по } 3 \textit{ типу} \\ x_1,\ x_2, \ge 0 \end{cases}$$

Получили задачу линейного программирования в стандартном виде. Запишем ее в канонической форме:

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 600, \\ 3x_1 + x_2 + x_4 = 357 \\ x_1 + 5x_2 + x_5 = 600 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0 \end{cases}$$

Изобразим графически множество допустимых планов для задачи, записанной в стандартном виде:

1)3 x_1 + $4x_2$=600

x_1	0	200
x_2	150	0

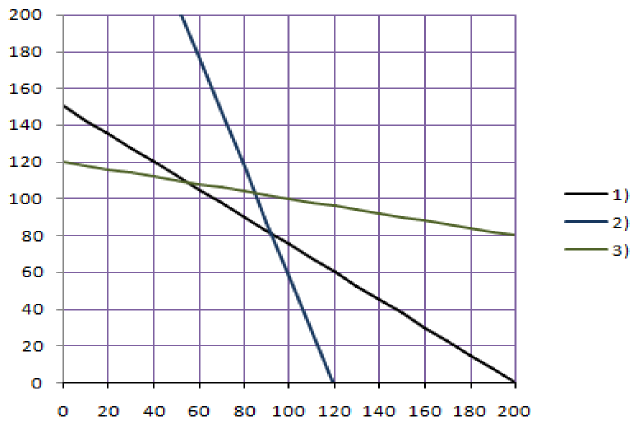
2) $3x_1$ +x_2 =357

x_1	100	50
x_2	57	207

3) x_1 + $5x_2$ =600

x_1	0	100
x_2	120	100

Область допустимых значений.



Найдем графическим методом оптимальный план выпуска продукции: построим вектор наискорейшего возрастания функции $\vec{g} = (42;26)$.

Проведем линии уровня, перпендикулярные вектору $\vec{g}$. Сдвигая линии уровня вдоль вектора по его направлению, находим точку, в которой линия уровня покидает область допустимых решений задачи. Этой точкой является точка (92, 81).

$X_{опт} = (92; 81)$ $F_{\max} = 42 \cdot 92 + 26 \cdot 81 = 5970$.

Проведем анализ чувствительности в отдельности для каждого из параметров b_1, b_2, b_3, c_1, c_2.

Параметр b_1: 1 прямая проходит через оптимальную точку. Поэтому параметр b_1 можно только увеличивать, поднимая прямую параллельно самой себе до точки (84,6;103,07). Значит, запасы 1 типа сырья можно увеличивать до 3*84,6+4*103,07=666,08 ед., при этом прибыль составит F=6233,02 тыс. рублей.

Параметр b_2: 2 прямая проходит через оптимальную точку. Поэтому параметр b_2 можно только увеличивать, сдвигая прямую параллельно самой себе до точки (200; 0). Значит, запасы 2 типа сырья можно увеличивать до 3*200=600 ед., при этом прибыль составит F=8400 тыс. рублей.

Параметр b_3 : 3 прямая не проходит через оптимальную точку. Поэтому параметр b_3 можно и увеличивать, сдвигая прямую параллельно самой себе до точки (0, 150), и уменьшать, сдвигая прямую параллельно самой себе до точки (92, 81). Значит, запасы 3 типа сырья можно увеличивать до 0+5*150=750 ед. и уменьшать до 92+5*81=497, при этом прибыль не изменится.

Изменение параметров с приводит к вращению линии уровня, проходящей через оптимальную точку от 1 прямой до 2. Угловые коэффициенты этих прямых составляют: $\kappa_2 = -3$, $\kappa_1 = -\frac{3}{4}$.

Угловой коэффициент линии уровня $\kappa = -\frac{c_1}{c_2}$.

Зафиксируем значение c_2=26 и определим диапазон изменения для c_1, приравнивая угловые коэффициенты.

Получим: $\frac{c_1}{26} = 3 \Rightarrow c_1 = 78$ и $\frac{c_1}{26} = \frac{3}{4} \Rightarrow c_1 = 19{,}5$. Итак, $19{,}5 \le c_1 \le 78$.

При этом оптимальная точка не меняется, а прибыль колеблется от 78*92+26*81=9282 тыс. рублей до 19,5*92+26*81=3900 тыс. рублей.

Зафиксируем значение c_1=42 и определим диапазон изменения для c_2, приравнивая угловые коэффициенты.

Получим: $\frac{42}{c_2} = 3 \Rightarrow c_2 = 14$ и $\frac{42}{c_2} = \frac{3}{4} \Rightarrow c_2 = 56$. Итак, $14 \le c_2 \le 56$.

При этом оптимальная точка не меняется, а прибыль колеблется от 42*92+14*81=4998 тыс. рублей до 42*92+56*81=8400 тыс. рублей.

Составим математическую модель двойственной задачи. Запишем расширенную матрицу системы исходной задачи:

$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 600 \\ 3 & 1 & 357 \\ 1 & 5 & 600 \\ 42 & 26 & F \end{pmatrix}$ Транспонируем матрицу А: $A^T = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 & 42 \\ 4 & 1 & 5 & 26 \\ 600 & 357 & 600 & L \end{pmatrix}$.

Математическая модель двойственной задачи имеет вид:

$L = 600y_1 + 357y_2 + 600y_3 \to \min$

при ограничениях:

$$\begin{cases} 3y_1 + 3y_2 + y_3 \geq 42 \\ 4y_1 + y_2 + 5y_3 \geq 26 \end{cases}$$

$y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0,\ y_3 \geq 0$

Найдем решение двойственной задачи, используя основные теоремы двойственности.

Согласно первой теореме двойственности $F_{\max} = L_{\min} = 5970$. Определим $Y_{опт}$ по второй теореме двойственности. Для этого подставим найденное $X_{опт} = (92;\ 81)$ в систему ограничений исходной задачи и оставим в каждом нестрогом неравенстве лишь один знак: «<» или «=».

$$\begin{cases} 3*92 + 4*81 = 600, \\ 3*92 + 81 = 357, \\ 92 + 5*81 < 600, \\ x_1,\ x_2, \geq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1 > 0 \\ y_2 > 0 \\ y_3 = 0 \end{cases}$$

Найденные нулевые значения $Y_{опт}$ подставляем в систему ограничений двойственной задачи:

$$\begin{cases} 3y_1 + 3y_2 = 42 \\ 4y_1 + y_2 = 26 \end{cases} \quad \begin{cases} y_1 = 4 \\ y_2 = 10 \end{cases}$$

$Y_{опт} = (3;\ 4;\ 0)$

Найдем решение исходной задачи симплексным методом:

БП	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i	*оценка*
x_3	3	4	1	0	0	600	200
x_4	3	1	0	1	0	357	119
x_5	1	5	0	0	1	600	600
Δ_j	-42	-26	0	0	0	0	

БП	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i	*оценка*
x_3	0	3	1	-1	0	243	81
x_1	1	1/3	0	1/3	0	119	357
x_5	0	14/3	0	-1/3	1	481	103,07
Δ_j	0	-12	0	14	0	4998	

БП	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i	*оценка*
x_2	0	1			0	81	
x_1	1	0			0	92	
x_5	0	0			1	103	
Δ_j	0	0	4	10	0	5970	

Критерий оптимальности для максимума $\Delta_j \geq 0$ выполняется. Значит, полученное опорное решение является оптимальным.

$X_{опт} = (92;\ 81)\ \ F_{\max} = 5970$.

Используя симплексную таблицу последнего шага, выпишем двойственные оценки сырья каждого типа. Установим соответствие между переменными:

Переменные исходной задачи	
основные	дополнительные
$x_1\ x_2$	$x_3\ x_4\ x_5$

↕ ↕ $y_4\ y_5$	↕ ↕ ↕ $y_1\ y_2\ y_3$
дополнительные	основные
Переменные двойственной задачи	

Последняя строка симплекс-таблицы показывает двойственные оценки: $Y_{опт} = (4; 10; 0)$.

Симплексный метод решения задач линейного программирования практически реализуем лишь при небольшом количестве переменных и неравенств в математической модели задачи. Данный метод достаточно легко программируется, поэтому при решении задач целесообразно использовать компьютерные пакеты. Одним из распространенных пакетов, применяемых для решения подобных задач, является «*Поиск решения*» MS Excel.

Решение задачи в Microsoft Excel.

		Расход сырья			
	переменные	тип 1	тип 2	тип 3	цена
Изделие 1	92	3	3	1	42
Изделие 2	81	4	1	5	26
	общее кол-во	600	357	497	
	запас	600	357	600	
	общая стоимость	5970			

Отчет по результатам

	Целевая ячейка (максимум)				
Ячейка	**Имя**	**Исходное значение**	**Результат**		
$C$7	общая стоимость	0	5970		
	Изменяемые ячейки				
Ячейка	**Имя**	**Исходное значение**	**Результат**		
$B$3	Изделие 1 переменные	0	92		
$B$4	Изделие 2 переменные	0	81		
	Ограничения				
Ячейка	**Имя**	**Значение**	**Формула**	**Статус**	**Разница**
$C$5	общее кол-во тип 1	600	$C$5<=$C$6	связанное	0
$D$5	общее кол-во тип 2	357	$D$5<=$D$6	связанное	0
$E$5	общее кол-во тип 3	497	$E$5<=$E$6	не связан.	103

Отчет по устойчивости

Изменяемые ячейки	Показатели				
Имя	**Результ. значение**	**Нормир. стоимость**	**Целевой коэффициент**	**Допустимое увеличение**	**Допустимое уменьшение**
Изделие 1	92	0	42	36	22,5
Изделие 2	81	0	26	30	12
Ограничения					
Имя	**Результ. значение**	**Теневая цена**	**Ограничение правая часть**	**Допустимое увеличение**	**Допустимое уменьшение**
тип 1	600	4	600	66,8	120
тип 2	357	10	357	243	91,6
тип 3	497	0	600	1E+30	103

Отчет по пределам

Ячейка	**Целевое Имя**	**Значение**						
$C$7	общая стоимость тип 1	5970						
Ячейка	**Изменяемое Имя**	**Значение**		**Нижний**	**Целевой**		**Верхний**	**Целевой**

				предел	результат		предел	результат
$B$3	Изделие 1 переменные	92		0	3864		92	5970
$B$4	Изделие 2 переменные	81		0	2106		81	5970

Отчет по результатам содержит информацию о целевой функции, о значениях переменных, полученных в результате решения задачи; о результатах оптимального решения для ограничений и для граничных условий.

Если ресурс используется полностью (т.е. ресурс дефицитный), то в графе «**Статус»** соответствующее ограничение указывается как «**связанное»**; при неполном использовании ресурса (т.е. ресурс недефицитный) в этой графе указывается «**не связан»**. В графе «**Значение»** приведены величины использованного ресурса.

Для граничных условий в графе «**Разница»** показана разность между значением переменной в найденном оптимальном решении и заданным для нее граничным условием.

Таблица отчета по результатам дает информацию для анализа возможного изменения запасов *недефицитных* ресурсов при сохранении полученного оптимального значения целевой функции. Если на ресурс наложено ограничение типа $\leq$, то в графе «**Разница»** дается количество ресурса, которое не используется при реализации оптимального решения.

Сырье типа 3 используется не полностью, остается в количестве 103 ед. Ресурсы типа 1 и 2 являются дефицитными.

Таблицы отчетов по устойчивости и пределам содержат следующую информацию.

О переменных:

1. Результат решения задачи.

2. Нормированная стоимость, которая показывает, на сколько изменится значение целевой функции в случае принудительного включения единицы этой продукции в оптимальное решение.

3. Коэффициенты целевой функции.

4. Предельные значения приращения целевых коэффициентов Δcj , при которых сохраняется первоначальное оптимальное решение.

При выходе за указанные в отчете по устойчивости пределы изменения цен оптимальное решение может меняться.

Относящуюся к ограничениям:

1. Величина использованных ресурсов в колонке *«Результ. Значение»*.

2. Предельные значения приращения ресурсов Δbi . В графе «*Допустимое уменьшение***»** показывают, на сколько можно уменьшить (устранить излишек) или увеличить (повысить минимально необходимое требование) ресурс, сохранив при этом оптимальное решение. Рассмотрим анализ *дефицитных* ресурсов, так как анализ *недефицитных* ресурсов был дан выше.

Анализируя отчет по результатам, мы установили, что существуют причины (ограничения), не позволяющие выпускать больше, чем в оптимальном решении, изделий и получать более высокую прибыль. В рассматриваемой задаче такими ограничениями *являются дефицитные* ресурсы 1 и 2. Поскольку знак ограничений этих запасов имеет вид $\leq$, то возникает вопрос, на сколько максимально должен возрасти объем этих ресурсов, чтобы обеспечить увеличение выпуска продукции. Ответ на этот вопрос показан в графе «*Допустимое увеличение*».

3. Ценность дополнительной единицы i-го ресурса (теневая цена) рассчитывается только для *дефицитных* ресурсов. Значения теневых цен являются оптимальным решением двойственной задачи.

Решение двойственной задачи имеет вид: $y_1^*=4$, $y_2^*=10$, $y_3^*=0$.

Каждая из оценок указывает, как изменится максимальное значение целевой функции (максимальная выручка), если изменить на единицу запасы соответствующих ресурсов. Наибольшее изменение выручки произойдет, если изменить объем 2 ресурса, а изменение 3 ресурса (в границах устойчивости) не приведет к изменению целевой функции ($y_3^*=0$).

Оценки y_1^*, y_2^* положительны. Это означает, что при реализации оптимального плана соответствующие ресурсы расходуются полностью.

Следовательно, 1 и 2 ресурсы дефицитны. $y_3^*=0$ это означает, что в оптимальном решении 3 ресурс расходуется не полностью. Остаток его является значением балансовой переменной в оптимальном решении исходной задачи.

3. Рентабельными являются 1-я, 2-я продукции (x_1^*, x_2^*, в оптимальном плане положительны), что подтверждает отчет по пределам [1].

Подробный анализ оптимального решения реальных экономических задач позволяет выделить и формально описать наиболее важные, существенные связи, получить новые знания об объекте экономической теории.

Владение аппаратом линейного программирования необходимо каждому специалисту в области экономики.

1. Двоерядкина, Н.Н., Чалкина, Н.А. Решение оптимизационных задач: лабораторный практикум. – Благовещенск: Изд-во АмГУ, 2010. – 124 с.

2. Красс, М.С. Математика для экономистов: Учеб. пособие: рек. УМО / М.С. Красс, Б.П. Чупрынов. – СПб.: Питер, 2009. – 464 с.