УДК 519.853.2 + 519.632

Н.Н. Максимова

ИССЛЕДОВАНИЕ ПОЛУКОЭРЦИТИВНОЙ ЗАДАЧИ СИНЬОРИНИ МЕТОДОМ ЭРРОУ – ГУРВИЦА

В работе рассматривается алгоритм решения одной вариационной задачи теории упругости – скалярной задачи Синьорини. Решение состоит в построении схем двойственности с модифицированным функционалом Лагранжа к исходной полукоэрцитивной вариационной задаче и последующем применении метода Эрроу – Гурвица поиска седловой точки. Реализация алгоритма проводится при аппроксимации задачи по методу конечных элементов. Алгоритм реализован в ППП Matlab R2010b.

Ключевые слова: скалярная задача Синьорини, метод множителей Лагранжа, седловая точка, метод конечных элементов, метод Эрроу – Гурвица.

THE STUDY SEMICOERCIVE SIGNORINI PROBLEM BY ARROW – HURWICZ METHOD

The algorithm for solving the variational problem of the theory of elasticity (named scalar Signorini problem)is presented in the paper. The circuit solution is to construct a dual circuit with a modified method of Lagrange Multipliers to the original semicoercive variational formulation and subsequent use of research Arrow – Hurwitz method of the saddle point. The implementation of the algorithm is carried out in the approximation problems by the Finite Element Method. The algorithm is implemented in Matlab SPT R2010b.

Key words: Scalar Signorini problem, The Method of Lagrange Multipliers, Saddle Point, Finite Element Method, Arrow-Hurwitz Method.

Постановка задачи

Рассмотрим полукоэрцитивную задачу Синьорини (задача о движении жидкости в области, ограниченной полунепроницаемой мембраной), вариационная постановка которой имеет следующий вид [1]:

$$\begin{cases} J(v) = \dfrac{1}{2}\int\limits_{\Omega} |\nabla v|^2 \, d\Omega - \int\limits_{\Omega} f \quad v \quad d\Omega \to \min, \\ v \in G = \{w \in W_2^1(\Omega): \ w \geq 0 \quad на \quad \Gamma\}, \end{cases} \tag{1}$$

где $\Omega \subset R^n \quad (n = 2,\ 3)$ – ограниченная область с достаточно гладкой границей Γ; $f \in L_2(\Omega)$ – заданная функция.

Условие разрешимости задачи (1) имеет вид:

$$\int\limits_{\Omega} f \quad d\Omega < 0. \tag{2}$$

Для решения задачи (1) рассмотрим схему двойственности, основанную на модифицированном функционале Лагранжа. Данный подход состоит в замене исходной задачи поиска условного экстремума задачей поиска седловой точки функционала Лагранжа.

Схема двойственности с модифицированным функционалом Лагранжа для скалярной задачи Синьорини

Определим в $W_2^1(\Omega)\times L_2(\Gamma)$ модифицированный функционал Лагранжа [2-4]:

$$M(v,l)=\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2\,d\Omega-\int_\Omega f\quad v d\Omega+\frac{1}{2r}\int_\Gamma\left\{\left[\left(l-r\quad v\right)^+\right]^2-l^2\right\}d\Gamma, \tag{3}$$

где $r>0$ – const, $\left(l-r\quad v\right)^+=\max\{0,\ l-r\quad v\}$.

Пару $(v^*,l^*)\in W_2^1(\Omega)\times L_2(\Gamma)$ будем называть седловой точкой для $M(v, l)$, если выполняется двустороннее неравенство

$$M(v^*,l)\le M(v^*,l^*)\le M(v,l^*),\qquad \forall\ \ v\in W_2^1(\Omega),\quad \forall l\in L_2(\Gamma). \tag{4}$$

Легко показать, что функционал $M(v, l)$ является выпуклым по v при фиксированном l и вогнутым по l при фиксированном v.

Для поиска седловой точки модифицированного функционала применяется алгоритм Удзавы. Задаем произвольно $l^0\in W_2^{1/2}(\Gamma)$, который является следом на Γ некоторой функции $v^0\in W_2^1(\Omega)$. На $(k+1)$-й итерации метода выполняем следующие шаги:

шаг 1. Определяем $v^{k+1}=\arg\min\limits_{v\in W_2^1(\Omega)} M(v,l^k)$;

шаг 2. Полагаем $l^{k+1}=(l^k+r\quad v^{k+1})^+$,

где r – параметр сдвига по двойственной переменной.

Подробное описание сходимости алгоритма и результаты численных расчетов, в том числе с одновременной проксимальной регуляризацией функционала, приведены в [5, 6]. При численной реализации метода выделяются два итерационных процесса: внутренний – для минимизации по прямой переменной конечномерного аналога функционала $M(v, l)$ при фиксированной двойственной переменной (первый шаг алгоритма Удзавы), и внешний – для пересчета компонент двойственной переменной при фиксированной первой компоненте (второй шаг алгоритма Удзавы). При реализации первого шага обычно применялся метод спуска. В данной работе рассмотрим несколько иной подход.

Аппроксимация задачи по методу конечных элементов

Аппроксимируем модифицированный функционал (3) по методу конечных элементов [7]. Введем следующие обозначения: F_h – триангуляция области Ω, h – параметр триангуляции, P – множество индексов узлов триангуляции, I – множество индексов граничных узлов триангуляции, $V_h=\left\{v_h=\sum\limits_{i\in P_h}v_i\varphi_i\right\}$ – линейная оболочка соответствующих кусочно-аффинных базисных функций φ_i. Через y_i обозначим приближенное значение решения v в узле $M_i\quad(i\in P)$, a_i – приближенное значение двойственной переменной l в узле $M_i\quad(i\in I)$.

Во всех численных примерах в качестве расчетной области выберем единичный квадрат $\Omega=[-1/2,\ 1/2]\times[-1/2,\ 1/2]$ и триангуляцию области проведем с помощью равномерной сетки. Счет будем осуществлять на сетках с шагами $h_N=1/4,\ 1/8,\ 1/16,\ 1/32,\ 1/64$, где $N=\overline{1,\ 5}$ – номер сетки.

При аппроксимации квадратичной формы $a(v,v)=\int_\Omega|\nabla v|^2\,d\Omega$ получаем ее конечномерный аналог $\langle Ay,\ y\rangle=\sum\limits_{i\in P}\sum\limits_{j\in P}A_{ij}y_iy_j$, где элементы матрицы жесткости A рассчитываются по формуле

$$A=\left\{\int_\Omega\nabla\varphi_i\nabla\varphi_j d\Omega\right\}_{i,j\in P}. \tag{5}$$

При аппроксимации линейного слагаемого $\int\limits_{\Omega} f \quad v d\Omega$ получаем $\langle F,\ y\rangle = \sum\limits_{i\in P} F_i y_i$, где элементы вектора F рассчитываются по формуле

$$F = \left\{ \int\limits_{\Omega} f \quad \varphi_i d\Omega \right\}_{i\in P}. \tag{6}$$

Интеграл $\dfrac{1}{2r}\int\limits_{\Gamma}\left\{\left[\left(l - r \quad v\right)^{+}\right]^{2} - l^{2}\right\} d\Gamma$ в модифицированном функционале Лагранжа вычислим приближенно по формуле прямоугольников. Учитывая расчетную область и равномерную сетку триангуляции, получаем следующее выражение: $\dfrac{h}{2r}\sum\limits_{i\in I}\left\{\left[\left(a_i - r y_i\right)^{+}\right]^{2} - a_i^{2}\right\}$.

Окончательно конечномерный аналог модифицированного функционала Лагранжа (3) принимает вид

$$\tilde{M}(y,a) = \frac{1}{2}\langle A \quad y,\ y\rangle - \langle F,\ y\rangle + \frac{h}{2r}\sum_{i\in I}\left\{\left[\left(a_i - r y_i\right)^{+}\right]^{2} - a_i^{2}\right\},\quad y\in R^{|P|},\ a\in R^{|I|}. \tag{7}$$

Согласно алгоритму метода множителей [2], седловая точка конечномерного функционала (7) является решением системы уравнений

$$\nabla_y \tilde{M}(y,a) = 0,\quad \nabla_a \tilde{M}(y,a) = 0.$$

Продифференцируем функционал $\tilde{M}(y,a)$ по компонентам прямой переменной ($i\in P$) и приравняем производные к нулю:

$$\frac{\partial \tilde{M}(y,a)}{\partial y_i} = \left\{ \begin{array}{l} \sum\limits_{j\in P} A_{ij} y_j - F_i, \qquad i\in P\setminus I, \\ \sum\limits_{j\in P} A_{ij} y_j - F_i - h\left(a_i - r y_i\right)^{+}, \quad i\in I. \end{array} \right\} = 0. \tag{8}$$

Получаем расчетные формулы для компонент прямой переменной: для внутренних узлов ($i\in P/I$)

$$y_i^{(n+1)} = -\frac{1}{A_{ii}}\left(\sum_{j<i} A_{ij} y_j^{(n+1)} + \sum_{j>i} A_{ij} y_j^{(n)} - F_i\right); \tag{9}$$

для граничных узлов ($i\in I$) вычисляем:

$$\psi_i = -\frac{1}{A_{ii}}\left(\sum_{j<i} A_{ij} y_j^{(n+1)} + \sum_{j>i} A_{ij} y_j^{(n)} - F_i\right);, \tag{10}$$

далее полагаем

$$y_i^{(n+1)} = \begin{cases} \psi_i, \quad \text{если} \quad \psi_i \ge \dfrac{a_i^{(n)}}{r}, \\ -\dfrac{1}{A_{ii} + hr}\left(\sum\limits_{j<i} A_{ij} y_j^{(n+1)} + \sum\limits_{j>i} A_{ij} y_j^{(n)} - F_i - h a_i^{(n)}\right), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{если} \quad \psi_i < \dfrac{a_i^{(n)}}{r}. \end{cases} \tag{11}$$

Вычислим производные по компонентам двойственной переменной ($i\in I$) и приравняем к нулю:

$$\frac{\partial \tilde{M}(y,a)}{\partial a_i} = h\left\{\left(a_i - r y_i\right)^{+} - a_i\right\} = 0,$$

откуда получим формулу для расчета компонент двойственной переменной

$$a_i^{(n+1)} = \left(a_i^{(n)} - r y_i^{(n+1)}\right)^{+},\quad i\in I, \tag{12}$$

которая, очевидно, также совпадает с конечномерным аналогом формулы второго шага алгоритма Удзавы. Кроме того, эта же формула представляет собой реализацию метода проекции градиента для максимизации модифицированного функционала по двойственной переменной с шагом сдвига, равным параметру двойственности r.

Согласно [5], итерационный процесс (9)-(12) можно назвать методом Эрроу – Гурвица, в котором для нахождения седловой точки применяются метод проекции антиградиента для минимизации по прямой переменной и метод проекции градиента для максимизации по двойственной переменной.

В качестве критерия останова итерационного процесса по формулам (9)-(12) выберем следующее условие:

$$\max_i \left| \frac{\partial \tilde{M}(y^{(n)}, a^{(n)})}{\partial y_i} \right| \le 10^{-N}. \quad (13)$$

Очевидно, что данный критерий демонстрирует сходимость итерационного процесса по прямой переменной, поэтому, чтобы показать сходимость по двойственной переменной, будем вычислять величину

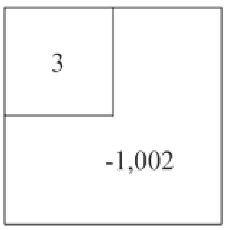
$$\Delta a^{(n)} = \max_i \left| a_i^{(n)} - a_i^{(n-1)} \right|,$$

где n – число итераций метода. В расчетных таблицах 1-2 данная величина представлена для последней сетки с номером N=5.

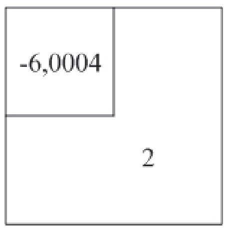
В качестве начального вектора на первой сетке в самом начале вычислений брался нулевой вектор. При переходе к более мелкой сетке начальный вектор брался равным линейной аппроксимации решения, полученного на последней внешней итерации предыдущей сетки.

Численная реализация и результаты расчетов

Зададим параметры для численных расчетов. Функцию f выберем кусочно-постоянной в расчетной области Ω так, чтобы выполнилось условие разрешимости (2). В зависимости от вида функции f будем решать две задачи (рис. 1).



а) задача 1



б) задача 2

Рис. 1. Способы задания функции f в задаче Синьорини.

Результаты численных расчетов представлены в табл. 1-2, графики полученных решений (на последней сетке) – на рис. 2.

Как видно из расчетных таблиц, скорость сходимости итерационного процесса зависит как от параметра двойственности r, так и от параметров самой задачи.

Следует отметить, что при выполнении критерия останова счета отклонение по двойственной компоненте значительно, особенно для задачи 2, и если помимо критерия (13) дополнительно использовать критерий $\max_i \left| a_i^{(n)} - a_i^{(n-1)} \right| \le 10^{-N}$, то число итераций возрастет значительно. Это подтверждается дополнительными расчетами, которые в данной работе не представлены.

Таблица 1

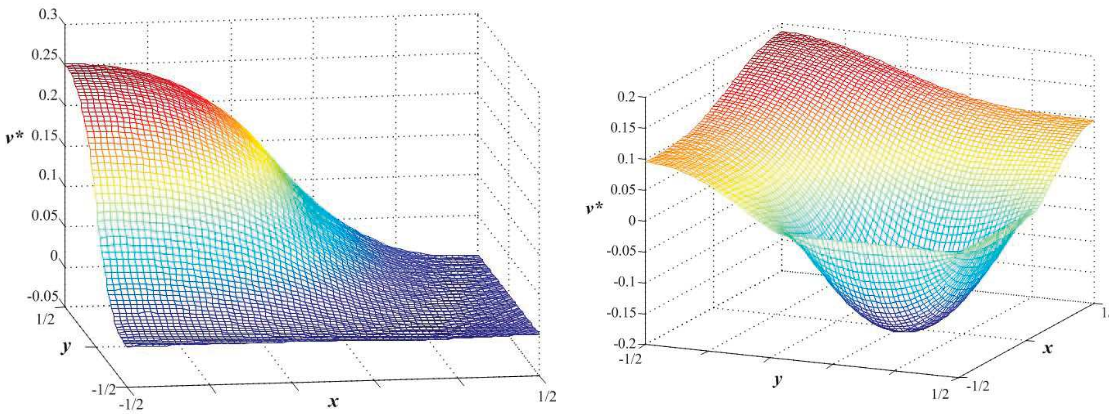
Число итераций метода множителей для задачи 1

Номер сетки, N		1	2	3	4	5	$\Delta a^{(n)}$
Шаг, h_N		1/4	1/8	1/16	1/32	1/64	
Параметр двойственности	$r = 10^6$	1	2	10	50	149	$1{,}6\cdot10^{-4}$
	$r = 10$	1	2	10	41	150	$1{,}8\cdot10^{-4}$
	$r = 5$	1	2	11	31	144	$1{,}6\cdot10^{-4}$
	$r = 1$	1	2	14	54	69	$1{,}2\cdot10^{-4}$
	$r = 0{,}5$	1	3	13	109	55	$3{,}5\cdot10^{-4}$

Таблица 2

Число итераций метода множителей для задачи 2

Номер сетки, N		1	2	3	4	5	$\Delta a^{(n)}$
Шаг, h_N		1/4	1/8	1/16	1/32	1/64	
Параметр двойственности	$r = 10^6$	3	3	7	14	34	$3{,}5\cdot10^{-3}$
	$r = 10$	3	4	7	11	23	$2{,}2\cdot10^{-3}$
	$r = 5$	3	1	16	17	32	$2{,}9\cdot10^{-3}$
	$r = 1$	3	2	2	5	16	$5{,}8\cdot10^{-2}$
	$r = 0{,}5$	4	2	3	13	36	$4{,}2\cdot10^{-2}$



а) б)

Рис. 2. Графики решения задачи Синьорини:
а – решение задачи 1; б – решение задачи 2.

Заключение

В работе исследована вариационная задача механики с односторонними ограничениями на границе – скалярная задача Синьорини. Для полукоэрцитивной постановки задачи реализован алгоритм, основанный на замене исходной вариационной задачи задачей поиска седловой точки модифицированного функционала Лагранжа. При конечно-элементной реализации алгоритма для поиска седловой точки используется метод, основанный на пошаговом спуске по прямой переменной и подъеме по двойственной переменной.

Показать сходимость применяемого метода поиска седловой точки конечномерного аналога модифицированного функционала Лагранжа, в отличие от алгоритма Удзавы, довольно трудно, однако для исследуемых задач построенный метод является более эффективным в плане вычислительных затрат. Эффективность в данном случае будет зависеть от значения параметра двойственности.

Ранее такой подход был применен для решения модельной задачи механики с трением на границе [8]. При реализации алгоритма были получены аналогичные выводы.

1. Гловински, Р. Численное исследование вариационных неравенств / Р. Гловински, Ж.-Л.Лионс, Р. Тремольер. – М.: Мир, 1979. – 574 с.

2. Бертсекас, Д. Условная оптимизация и методы множителей Лагранжа. – М.: Радио и связь, 1987. – 400 с.

3. Гольштейн, Е.Г. Модифицированные функции Лагранжа. Теория и методы оптимизации / Е.Г. Гольштейн, Н.В. Третьяков. – М.: Наука, 1989. – 400 с.

4. Гроссман, К. Нелинейное программирование на основе безусловной минимизации / К. Гроссман, А.А. Каплан. – Новосибирск: Наука. Сибирское отд., 1981. – 183 с.

5. Намм, Р.В. Решение полукоэрцитивной задачи Синьорини методом итеративной проксимальной регуляризации модифицированного функционала Лагранжа / Р.В. Намм, А.С. Ткаченко // Известия вузов. Математика. – 2010. –№ 4. – С. 36-45.

6. Ткаченко, А.С. Модифицированные функционалы Лагранжа в механике: Дис. …канд. физ.-мат. наук. – Хабаровск, 2011. – 105 с.

7. Главачек, И. Решение вариационных неравенств в механике / И. Главачек, Я. Гаслингер, И. Нечас, Я. Ловишек. – М.: Мир, 1986. – 270 с.

8. Максимова, Н.Н. Численное исследование одной вариационной задачи механики с применением методов двойственности // Вестник ТОГУ. – 2013. – № 2(29). – С. 49-58.