

ПЕРЕКАТЫВАНИЕ ГРАНЕНОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА НА УГЛОВОМ ВИБРОЛОТКЕ

В статье рассматривается относительное движение граненого твердого тела на угловом вибролотке. Это движение происходит под действием сил тяжести, трения и сил инерции.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения движения, силы трения, силы инерции, вибрационное перемещение.

THE MOTION OF GRANTEE SOLID ON THE CORNER VIBROPLANE

In this paper the motion of grantee solid on the corner vibroplane is considered. This motion is result of the action of gravity, friction and inertia.

Key words: differential equations of the motion, forces of friction, forces of inertia, vibration motion.

Рассмотрим движение плоского твердого тела, опирающегося своей плоской частью на шероховатую плоскость, расположенную под углом α к горизонтальному положению, а краями (в точках B и D) – на бортик (рис. 1).

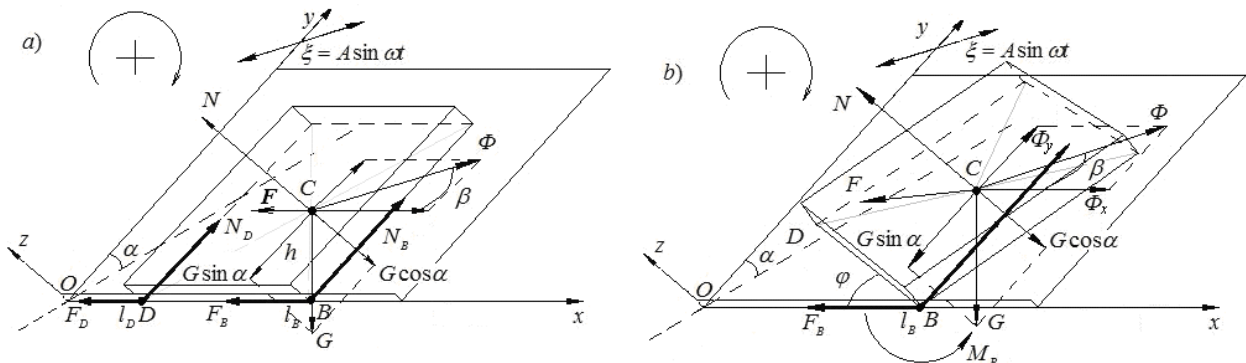


Рис. 1. Схема сил, действующих на твердое тело:
а) до опрокидывания; б) во время опрокидывания.

Пусть плоскость совершает поступательные прямолинейные гармонические колебания по закону $\xi = A \sin \omega t$, направленные под углом β к бортику в самой же плоскости. Здесь: A , ω – амплитуда и частота колебаний; t – время. Началом этапа опрокидывания (перекатывания) является момент отрыва одной из точек контакта при сохранении контакта в другой точке (для определенности рассматривается отрыв в точке D). Опрокидывание будем считать состоявшимся, если тело повернется вокруг точки B так, что центр масс C окажется с ней на одном перпендикуляре к бортику. Инерционные свойства тела характеризуются массой M и моментом инерции J_C относительно центра масс. Положение будем задавать координатами центра масс x_C, y_C в системе координат Oxy , а также уг-

лом поворота φ , относительное положение точек контакта и центра масс определим размерами h, l_D, l_B [1].

Для более удобной записи считаем положительным направление угла поворота по часовой стрелке.

Тело находится под действием следующих сил: силы тяжести $\mathbf{G} = M\mathbf{g}$, нормальных реакций $\mathbf{N}_D, \mathbf{N}_B$ и сил трения $\mathbf{F}_D, \mathbf{F}_B$, в точках D и B ; трение плоской части тела распределено по всей площади и приводится относительно центра масс C к действию силы F и момента M_C , нормальное давление приводится к силе N . После отрыва контакта в точке D действие сил \mathbf{N}_D и \mathbf{F}_D прекращается. Считаем, что трение подчиняется закону Амонтона – Кулона:

$$|F_D| \leq f \cdot N_D; |F_B| \leq f \cdot N_B; |F| \leq f \cdot N.$$

Здесь f – коэффициент трения.

Исследуемое движение может состоять из нескольких этапов: относительного покоя, одновременного скольжения в точках D и B , поворота вокруг точки B , скольжения в точке B с поворотом. Все этапы движения описываются общей системой уравнений:

$$\begin{aligned} M\ddot{x}_C &= \Phi \cos\beta + F_{Dx} + F_{Bx} + F_x, \\ M\dot{y}_C &= N_D + N_B - Mg \sin\alpha + \Phi \sin\beta + F_y, \\ J_C\ddot{\varphi} &= -(F_{Dx} + F_{Bx})h + N_D l_D - N_B l_B - M_C, \\ N &= Mg \cos\alpha, \end{aligned} \quad (1)$$

где $\Phi = MA\omega^2 \sin\omega t$ – переносная сила инерции.

Если в какой-то момент случится, что $N_D = 0$ или $N_B = 0$, то происходит отрыв тела в соответствующей точке контакта. В случае одновременного нарушения положительности N_D и N_B наступает полный отрыв тела от бортика углового вибротка. Заметим, что опрокидывание через точку B возможно только при условии $\dot{x}_C > 0$.

Этап скольжения вправо ($\dot{x}_C > 0$) определяем условиями:

$$N_D > 0, N_B > 0, F_{Dx} + F_{Bx} + F_x = -f(N_D + N_B + N), \ddot{y}_C = 0, \ddot{\varphi} = 0. \quad (2)$$

Из системы (1) нетрудно получить ($\ddot{y}_C = 0, F_y = 0$), что скольжение вправо из состояния покоя может начаться только при условии

$$\Phi > \frac{f \cdot Mg(\sin\alpha + \cos\alpha)}{\cos\beta + f \cdot \sin\beta}.$$

Введем безразмерные величины: $\tau = \omega t$ – «время», $z = \frac{g}{A\omega^2}$ – параметр разгрузки. При условии, что

$$z > \frac{\sin\beta + \frac{1}{f} \cos\beta}{\sin\alpha + \cos\alpha}, \quad (3)$$

скольжения вправо (а также влево) не произойдет.

Дополним список безразмерных параметров:

$$\tilde{J}_B = \frac{J_B}{MA^2}, \tilde{J}_C = \frac{J_C}{MA^2} \text{ – приведенные моменты инерции; } \tilde{l}_B = l_B / A, \tilde{l}_D = l_D / A, \tilde{h} = h / A \text{ – па-}$$

раметры относительных координат центра масс; $\varphi' = \frac{d\varphi}{d\tau} = \dot{\varphi} / \omega$; $\varphi'' = \frac{d^2\varphi}{d\tau^2} = \ddot{\varphi} / \omega^2$ – безразмерные

угловая скорость и угловое ускорение тела; $\tilde{N}_B = \frac{N_B}{MA\omega^2}$, $\tilde{F}_B = \frac{F_B}{MA\omega^2}$ – безразмерные силы (в дальнейшем для упрощения записи волну в обозначениях безразмерных переменных будем опускать).

Из системы (1) также определяются нормальные реакции N_D и N_B :

$$N_D = \frac{(l_B - f \cdot h)(z \sin \alpha - \sin \beta \sin \tau)}{l_D + l_B}, \quad N_B = \frac{(l_D + f \cdot h)(z \sin \alpha - \sin \beta \sin \tau)}{l_D + l_B}.$$

Ввиду того, что реакции N_D и N_B , обращаются в нуль одновременно при выполнении условия $z \cdot \sin \alpha < \sin \beta$ в момент $\tau = \arcsin \frac{z \cdot \sin \alpha}{\sin \beta}$, опрокидывание во время скольжения исключается, а

выполнение условия

$$z \cdot \sin \alpha > \sin \beta \quad (4)$$

служит гарантией отсутствия этапа полного отрыва тела от бортика.

Опрокидывание (перекатывание) тела через точку B осуществляется при выполнении условий (рис. 2):

$$N_D = 0 (F_D = 0); N_B > 0, -F_{Bx} < f \cdot N_B, \varphi'' > 0, \quad (5)$$

из последних двух неравенств вытекает необходимое условие опрокидывания

$$\varepsilon = \frac{l_B}{h} < f. \quad (6)$$

Поворот вокруг точки B описывается уравнением вращательного движения ($\rho_C = BC$):

$$J_B \varphi'' = \rho_C \sin \tau \cos(\varphi + \beta - \nu) + \rho_C z \sin \alpha \sin(\varphi - \nu) - M_B, \quad (7)$$

при этом реакции точки B определяются выражениями:

$$F_{Bx} = -\sin \tau \cos \beta - \rho_C (\varphi'' \cos(\varphi - \nu) - \varphi'^2 \sin(\varphi - \nu)) - F_x, \quad (8)$$

$$N_B = -\sin \tau \sin \beta - \rho_C (\varphi'' \sin(\varphi - \nu) + \varphi'^2 \cos(\varphi - \nu)) + z \sin \alpha - F_y, \quad (9)$$

Для расчета сил трения F_x , F_y и момента M_B конкретизируем форму тела – прямоугольник

размерами $2l \times 2h$; нормальное давление $p = \frac{z \cos \alpha}{4\varepsilon h^2}$ равномерно распределено по всей площади

(рис. 3):

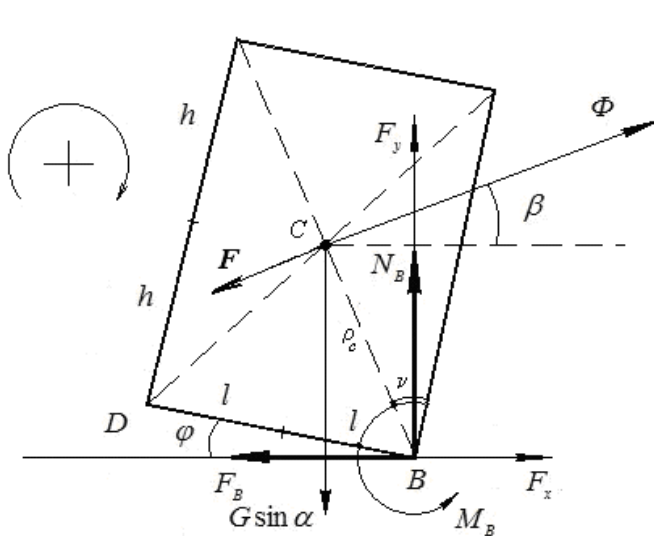


Рис. 2. Схема сил, действующих на тело при опрокидывании через точку B .

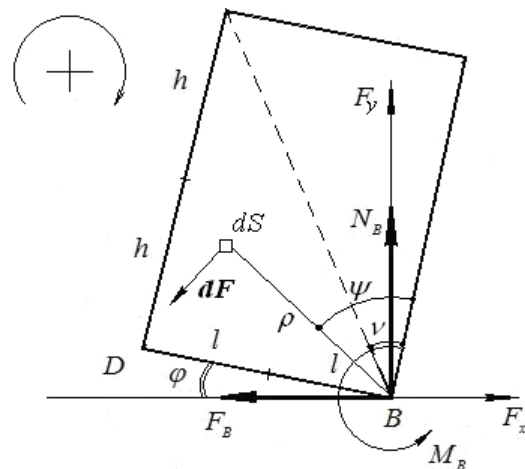


Рис. 3. Схема расчета распределенных сил трения.

$$F_x = -\iint_S dF \cos(\varphi - \psi) = -\cos\varphi \iint_S \cos\psi dF - \sin\varphi \iint_S \sin\psi dF = -F_1 \cos\varphi - F_2 \sin\varphi;$$

$$F_y = -\iint_S dF \sin(\psi - \varphi) = -\cos\varphi \iint_S \sin\psi dF + \sin\varphi \iint_S \cos\psi dF = F_1 \sin\varphi - F_2 \cos\varphi.$$

При этом

$$F_1 = \iint_S \cos\psi dF = f p \iint_S \cos\psi dS = \frac{f z}{2\varepsilon} \cos\alpha \left(\ln(\varepsilon + \sqrt{1 + \varepsilon^2}) + \varepsilon \sqrt{1 + \varepsilon^2} - \varepsilon^2 \right);$$

$$F_2 = \iint_S \sin\psi dF = f p \iint_S \sin\psi dS = \frac{f z}{2\varepsilon} \cos\alpha \left(\sqrt{1 + \varepsilon^2} - 1 + \varepsilon^2 \ln \frac{1}{3} (\sqrt{1 + \varepsilon^2} + 1) \right);$$

$$M_B = \iint_S \rho dF = f p \iint_S \rho dS = \frac{f h}{3\varepsilon} z \cos\alpha \left(\ln(\varepsilon + \sqrt{1 + \varepsilon^2}) + \varepsilon^3 \ln \frac{1}{\varepsilon} (\sqrt{1 + \varepsilon^2} + 1) + 2\varepsilon \sqrt{1 + \varepsilon^2} \right).$$

Условия начала этапа опрокидывания (5), (6) преобразуются следующим образом ($\varphi = 0, \varphi' = 0$):

$$-\varphi'' \rho_C \sin(\varphi - \nu) - \sin\tau \sin\beta + z \sin\alpha - F_y > 0 \quad (N_B > 0), \quad (10)$$

$$-\varphi'' \rho_C (\cos\nu + f \cdot \sin\nu) + \sin\tau (\cos\beta + f \cdot \sin\beta) + F_x + f \cdot F_y < f z \sin\alpha \quad (-F_{Bx} < f N_B), \quad (11)$$

$$\rho_C \sin\tau \cos(\varphi + \beta - \nu) + \rho_C z \sin\alpha \sin(\varphi - \nu) - M_B > 0 \quad (\varphi'' > 0), \quad (12)$$

$$\varepsilon < f \left(\varepsilon = \frac{l}{h} = \operatorname{tg} \nu \right). \quad (13)$$

Условие проскальзывания (3) можно уточнить. Оно гарантирует сцепление в точках контакта B, D в состоянии относительного покоя. Когда наступает фаза τ_1 начала опрокидывания:

$$\sin\tau_1 = \frac{f z (\sin\alpha + \cos\alpha)}{f \sin\beta + \cos\beta},$$

движение твердого тела начинает подчиняться уравнениям (7) - (9). Рассмотрим совокупность всех возможных начальных состояний этапа опрокидывания в предположении, что тело помещается в момент τ ($\tau_1 < \tau < \pi - \tau_1$) на виброплоскость, и опрокидывание начинается из состояния $\varphi = 0, \varphi' = 0$, а далее происходит в соответствии с уравнениями (7) - (9). Таким образом, имеем формальные уравнения:

$$J_B \varphi'' = h \sin\tau (\cos\beta + \varepsilon \sin\beta) - h \varepsilon z \sin\alpha,$$

$$F_{Bx} = -\sin\tau \cos\beta + \varphi'' h,$$

$$N_B = -\sin\tau \sin\beta + z \sin\alpha + \varphi'' h \varepsilon,$$

справедливые в указанный момент τ .

Условие безотрывности, $N_B > 0$ принимает вид:

$$-J_B \sin\tau \sin\beta + J_B z \sin\alpha + \varepsilon h^2 (\sin\tau (\cos\beta + \varepsilon \sin\beta) - \varepsilon z \sin\alpha) > 0.$$

Это неравенство будет выполняться при всех $\tau \in (\tau_1, \pi - \tau_1)$, если

$$z \sin\alpha > \left| \sin\beta - \frac{\varepsilon}{1 + \mu(1 + \varepsilon^2)} \cos\beta \right|, \quad (15)$$

где μ – инерционный коэффициент, взятый так, чтобы

$$J_C = \mu(1 + \varepsilon^2) h^2, \quad J_B = J_C + (1 + \varepsilon^2) h^2 = (1 + \mu)(1 + \varepsilon^2) h^2.$$

Условие непроскальзывания вправо, $-F_{Bx} < f \cdot N_B$, принимает вид:

$$J_B \sin \tau \cos \beta - h^2 (\sin \tau (\cos \beta + \varepsilon \sin \beta) - \varepsilon z \sin \alpha) <$$

$$< f (-J_B \sin \tau \sin \beta + J_B z + \varepsilon h^2 (\sin \tau (\cos \beta + \varepsilon \sin \beta) - \varepsilon z \sin \alpha)),$$

или

$$P(\varepsilon) \sin \tau < z \cdot \sin \alpha \cdot Q(\varepsilon), \quad (16)$$

где

$$P(\varepsilon) = \mu(1 + \varepsilon^2)(\cos \beta + f \cdot \sin \beta) + (f - \varepsilon) \sin \beta,$$

$$Q(\varepsilon) = f \cdot \mu(1 + \varepsilon^2) + f - \varepsilon.$$

Поиск интервалов знакопостоянства квадратных трех членов $P(\varepsilon), Q(\varepsilon)$ показывает, что при $\varepsilon \in (0, f), Q(\varepsilon) > 0, P(\varepsilon)$ либо положителен при всех ε , либо имеет подинтервал отрицательности $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \subset (0, f)$, где $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ – корни $P(\varepsilon)$. Таким образом, с учетом $0 < \tau_1 < \tau < \pi - \tau_1$, неравенство (16) выполняется при всех допустимых значениях остальных параметров на интервале $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, а при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1) \cup (\varepsilon_2, f)$ гарантируется неравенством

$$z \cdot \sin \alpha > \frac{P(\varepsilon)}{Q(\varepsilon)}. \quad (17)$$

В соответствии с рис. 4, на котором приводится расположение областей режимов движения твердого тела на плоскости параметров $\varepsilon - z$, показано, как меняются области при изменении угла α наклона виброплоскости. На рисунке представлены:

область 1, в которой происходит опрокидывание твердого тела в течение одного периода колебаний;

область 2, в которой происходит опрокидывание твердого тела в течение нескольких периодов, за исключением участка, ограниченного пунктиром, где начальная фаза опрокидывания периодически возникает, но полного опрокидывания не происходит; тело возвращается в начальное положение;

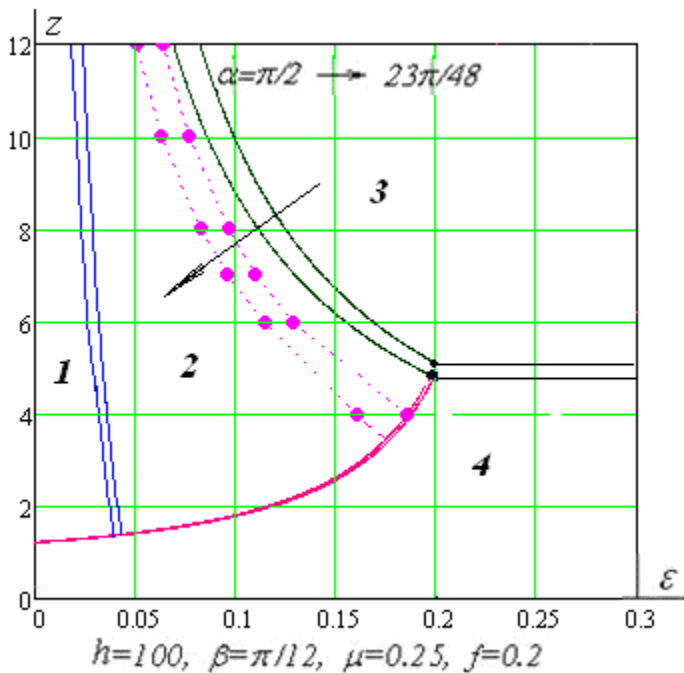


Рис. 4. Области существования состояний твердого тела.

область 3, в которой точки контакта B и D не отрываются от виброплоскости и тело остается в состоянии относительного покоя;

область 4, в которой уже в течение первого периода возникает проскальзывание в точке B , что автоматически исключает возможность опрокидывания.

Граница между областями 1 и 2 определялась на основе численного решения уравнения (7). Точка плоскости $\varepsilon - z$ включалась в область 1, если функция $\varphi(t)$, возрастая от нуля, достигала значения $\text{arcCtg}(\varepsilon)$, при этом не нарушались условия $N_B > 0, -F_{Bx} < f \cdot N_B$, которые контролировались неравенством (16). Граница

между областями 2 и 3 определялась зависимостью (16), граница между областями 1 и 2 и областью 4

– зависимостью (17), граница между областями 3 и 4 – зависимостью (3). Таким образом, условие (17) существенно расширило границы областей 1 и 2, которые без учета (17) находились бы на уровне границы областей 3 и 4. Условие безотрывности не влияет на границы областей 1 – 4. Все расчеты производились средствами математического пакета MathCAD.

1. Сельвинский, В.В. Динамика контактного взаимодействия твердых тел. – Благовещенск, 2009. – 164 с.