Прикладная математика. Механика

УДК 004.942:519.688

М.И. Рвачева, А.Г. Масловская

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА МОНТЕ-КАРЛО ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ СТОХАСТИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ ФИНАНСОВЫХ РЫНКОВ

Работа посвящена имитационному моделированию поведения финансовых рынков. В основе реализации модели лежит метод Монте-Карло. Для конструирования вычислительной схемы использованы подход модели Изинга, предназначенный для описания фазовых переходов. Разработана прикладная программа, позволяющая проводить расчет характеристик стохастического поведения финансовых рынков. Продемонстрированы результаты вычислительных экспериментов с различными наборами управляющих параметров модели.

Ключевые слова: имитационное моделирование, метод Монте-Карло, модель Изинга, стохастические характеристики, финансовый рынок, вычислительный эксперимент.

THE APPLICATION OF MONTE-CARLO METHOD TO SIMULATION OF FINANCIAL MARKETS STOCHASTIC BEHAVIOR

The paper is devoted to simulation of financial market behavior. The model implementation is based on Monte-Carlo method. In order to develop the computational scheme the approach of Ising model describing phase transition was used. The application program was designed to calculate financial market stochastic behavior characteristics. The results of computing experiments at various sets of control model parameters are demonstrated.

Key words: simulation, Monte-Carlo method, Ising model, stochastic characteristics, financial market, computing experiment.

Введение

В настоящее время фундаментальные законы, описывающие динамику поведения объектов естественных и технических наук, нашли широкое применение для описания экономических и финансовых процессов. Начиная с 1990 г. получила развитие новая наука – эконофизика, предполагающая использование методов статистической механики, теории фазовых переходов и принципов анализа нелинейной динамики для описания и интерпретации экономических процессов [1]. В работах ряда авторов [1-6] представлена концепция финансовых рынков, обнаруживающих стохастическое поведение, а также показана возможность описания характеристик подобных систем на основе физической модели взаимодействия спинов – модели Изинга. Модель Изинга была предложена Ленцем в 1920 г. и в настоящее время является классической моделью, используемой для формализации магнитных фазовых переходов [7-8]. Первые и общие идеи использования идей модели Изинга для описания закономерностей поведения финансовых рынков предложены в работе [2]. Более поздние модификации этой модели описаны в работах [3-6]. Основой такого подхода является применение принципа аналогии для построения экономико-математической модели: представление финансового рынка в виде системы инвесторов-агентов, взаимодействующих друг с другом, достаточно для описания стохастической динамики такой системы с помощью модели Изинга.

Методологическую основу реализации математических моделей дискретных стохастических систем составляет метод статистических испытаний, или метод Монте-Карло. Метод Монте-Карло предоставляет возможности численного моделирования систем большой размерности, а также постановки и проведения вычислительного эксперимента, направленного на изучение закономерностей, характеризующих фазовые переходы и критические явления. Метод случайных блужданий нашел применение в статистическом моделировании поведения характеристик макроскопических систем, поскольку предусматривает относительно несложную процедуру формализации алгоритма определения средних величин в каноническом ансамбле. Использование стохастического подхода и исследование на основе метода Монте-Карло поведения финансовых рынков является сравнительно новым, актуальным и активно развивающимся научным направлением в экономико-математическом моделировании.

Предметом исследования в представленной работе являются методы, алгоритмы и средства реализации стохастической модели взаимодействия инвесторов-агентов в финансовых рынках. Цель работы – разработка математического и прикладного программного обеспечения для расчета основных величин, характеризующих стохастическое поведение финансовых рынков, на основе двумерной модели Изинга.

Математическая формализация модели

В модели Изинга, используемой для описания фазовых переходов в магнитных материалах [7], рассматривается d-мерная решетка, содержащая $N = L^d$ узлов, где L– характерный размер решетки; с каждым узлом решетки i связан спин s_i, который может принимать значение $s_i = +1$, если спин сонаправлен с осью oz, и значение $s_i = -1$, если спин направлен противоположно. В моделях финансовых рынков, основанных на модели Изинга [2-6], по аналогии рассматривается система N взаимодействующих агентов, каждому из которых в определенный такт времени поставлено в соответствие значение $s_i = +1$, если агент играет роль покупателя, значение $s_i = -1$, если агент – продавец, и $s_i = 0$ – агент остается неактивным (в простейшем случае рассматривается двухпозиционная модель с $s_i = \pm 1$). Любая конфигурация модели задается набором переменных $s_1, s_2, \ldots s_N$. В такой финансовой системе локальные взаимодействия обусловлены позициями агентов, находящихся в узлах решетки.

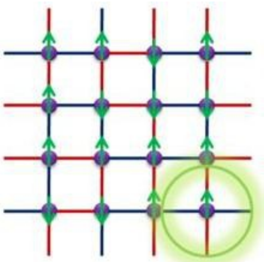


Рис. 1. Схема расположения агентов-инвесторов в узлах решетки.

Концептуальную постановку задачи можно сформулировать следующим образом: требуется провести реализацию модели Изинга для системы взаимодействующих агентов, что позволит рассчитать макроскопические характеристики, присущие поведению финансовых систем.

Для построения и реализации модели воспользуемся в том числе и авторской программной реализацией модели Изинга, представленной в работах [9-10]. Определим параметрами модели:

число случайных испытаний метода Монте-Карло –PP;

количество агентов финансовой системы –Ns;

потенциал взаимодействия между агентом s_i и его ближайшими по сетке соседями s_j – J_{ij};

сила внешнего воздействия на финансовую систему – α;

интенсивность реакции на изменение финансовой позиции отдельного агента – *b*;

характерный размер решетки – *L*.

Переменные величины и модели, подлежащие определению:

положение агента-инвестора (продавец или покупатель) – s_i;

общая тенденция поведения финансовой системы –*M*;

финансовая позиция отдельного агента –*E*.

Согласно основному алгоритму модели с использованием статистических оценок, необходимо провести расчет переменных величин.

Общая тенденция поведения всей финансовой системы в каждый такт времени *t* будет вычислена по формуле:

$$\langle M(t)\rangle = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} s_i(t). \tag{1}$$

Финансовая позиция отдельного агента s_i будет определена локальным полем – «энергией» *E*, которая определяется балансом взаимодействия сил влияния агентов-соседей, общим состоянием и в классическом подходе интерпретируется как «намагниченность» системы:

$$E_{s_i}(t) = \sum_{\langle i,j\rangle}^{N} J_{ij}\cdot s_i(t)\cdot s_j(t) - \alpha\cdot s_i(t)\cdot\langle M(t)\rangle, \qquad i,j=\overline{1,N}, \tag{2}$$

где J_{ij} – потенциал взаимодействия между агентом s_i и его ближайшими по сетке соседями s_j (при рассмотрении граничных узлов учитываются периодические краевые условия); α>0 – константа, определяющая силу внешнего воздействия (α>1 усиливает воздействие величины $\langle M\rangle$, а α<1 приводит к ослаблению этого влияния). В данном случае будем рассматривать модель с ближними взаимодействиями, т.е. $J_{ij}=1$ для соседних в сетке агентов и $J_{ij}=0$ – противном случае. Очевидно, что при $J>0$ реализуется «ферромагнитное» состояние системы, при котором инвесторы действуют согласованно с «соседями», при $J<0$ состояние соответствует «антиферромагнитному» – агенты играют против своих соседей по сетке.

В настоящей работе анализу подлежит временнáя зависимость:

$$r_{\Delta t}(t+1) = \langle M(t+1)\rangle - \langle M(t)\rangle, \tag{3}$$

где $\langle M(t)\rangle$ – общая тенденция поведения всей финансовой системы в момент времени *t*; $\langle M(t+1)\rangle$ – общая тенденция поведения всей финансовой системы в момент времени (*t*+1). Данная временнáя зависимость отражает стохастический отклик всей финансовой системы. Указанный подход был впервые предложен в работе [5].

Выбор состояния каждого агента +1 или –1 определяется случайно с вероятностью *p* и 1–*p* соответственно:

$$s_i(t+1) = \begin{cases} +1, & p = 1/\left[1+\exp\left(-2b\cdot E_{s_i}(t)\right)\right], \\ -1, & 1-p, \end{cases} \tag{4}$$

где параметр *b*>0 определяет интенсивность реакции на изменение локального поля $E_{s_i}(t)$. Геометрическая интерпретация модельной зависимости $p(E)$ при различных значениях параметра *b* показана на рис. 2.

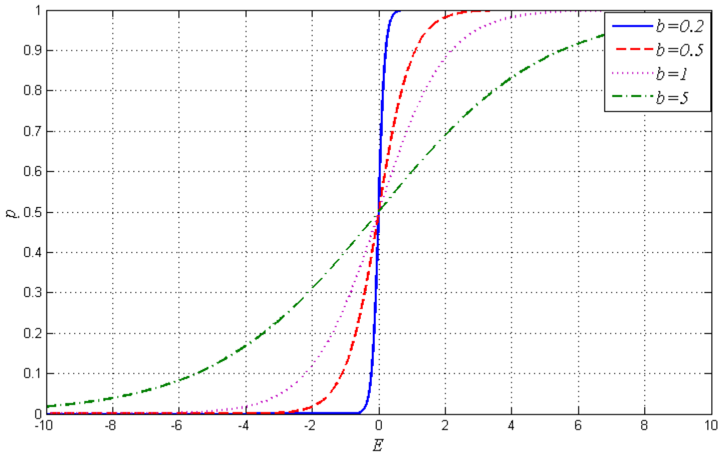


Рис. 2. Зависимость $p(E)$ при вариации значений параметра b.

Алгоритмизация и программная реализация имитационной модели

Модель реализуется на основе метода Монте-Карло. Алгоритм включает следующие основные шаги:

1) инициализирование начальных позиций агентов-инвесторов;

2) пробное случайное изменение позиций агентов;

3) вычисление общей тенденции поведения финансовой системы $M(t)$ и финансовой позиции отдельных агентов E;

4) повторение пунктов 2-3 для получения достаточного количества конфигураций финансового рынка в зависимости от заданного числа случайных испытаний.

Формализация алгоритма соответствует блок-схеме, изображенной на рис. 3.

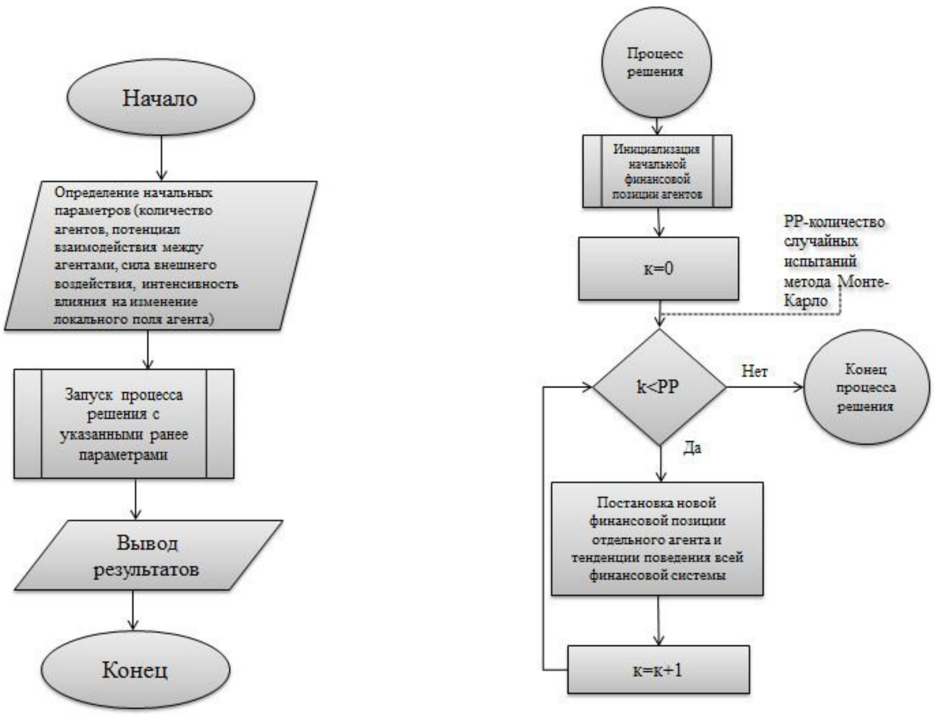


Рис. 3. Блок-схема алгоритма реализации модели.

Программа разработана в ППП Matlab 2010b. Структура программного приложения содержит следующие системные и функциональные модули:

1) главная форма, предназначенная для удобства ввода начальных данных и запуска системных модулей, отвечающих за визуализацию результатов моделирования;

2) функциональный модуль, предназначенный для формирования начальной конфигурации системы и расчета основных характеристик финансовых систем.

Структура программного приложения приведена на рис. 4.

Рис. 4. Структура приложения, предназначенного для моделирования характеристик финансовых рынков.

Модельный эксперимент и расчет характеристик финансовых рынков

При моделировании в качестве входных параметров необходимо инициализировать:

количество агентов финансовой системы – *Ns*;

потенциал взаимодействия между агентом s_i и его ближайшими по сетке соседями s_j – J_{ij};

силу внешнего воздействия на финансовую систему – α;

интенсивность реакции на изменение финансовой позиции отдельного агента – *b*;

Количество испытаний метода Монте-Карло (*PP*) для всех испытаний принято равным 100000.

Целью первого вычислительного эксперимента является демонстрация результатов моделирования финансовых позиций агентов-инвесторов с течением времени и общей тенденции поведения финансового рынка. Были установлены следующие параметры моделирования:

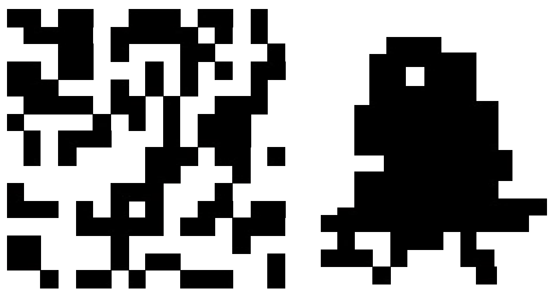
количество агентов финансовой системы – *Ns* = 128;

потенциал взаимодействия между агентом s_i и его ближайшими по сетке соседями s_j – $J_{ij} = 1$;

сила внешнего воздействия на финансовую систему – α=1;

интенсивность реакции на изменение финансовой позиции отдельного агента – *b*=0.1.

Модельные представления начальных финансовых позиций агентов и их позиций с течением времени продемонстрированы на рис. 5.



а *б*

Рис. 5. Начальные финансовые позиции агентов в момент времени *t*=0 – *а;* позиции агентов с течением времени *t*=1000 – *б* (при значениях модельных параметров: *Ns*=128, $J_{ij} = 1$, α=1, *b*=0.1).

Начальные позиции агентов – случайные. Незакрашенными ячейками показаны агенты, готовые продавать, а закрашенными – готовые покупать. Результаты поставленного эксперимента позволяют сделать вывод, что при $J_{ij} > 0$, независимо от начального положения агентов на рынке, система релаксирует к «ферромагнитному» состоянию, т.е. большинство агентов готово покупать. Это состояние наиболее выгодно для финансового рынка.

Рис. 6 отражает динамику общей тенденции поведения финансового рынка при данном выгодном состоянии финансовых позиций агентов-инвесторов.

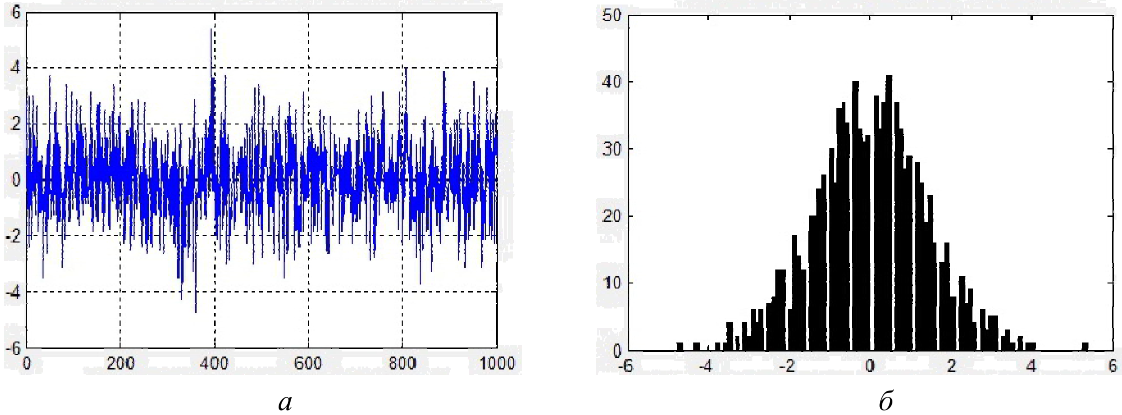


Рис. 6. Общая тенденция поведения финансовой системы – *а* и гистограмма динамического отклика финансовой системы – *б* (при значениях модельных параметров: *Ns*=128, $J_{ij}=1$, α=1, b=0.1).

Таким образом, при $J_{ij}=1$ реализуется более выгодное состояние финансового рынка, так как ему соответствует «ферромагнитное» состояние системы (большинство агентов готово покупать).

В рамках второго вычислительного эксперимента проводится демонстрация результатов моделирования финансовых позиций агентов-инвесторов с течением времени и общей тенденции поведения финансового рынка. Инициализированы следующие параметры моделирования:

количество агентов финансовой системы – *Ns*=128;

потенциал взаимодействия между агентом s_i и его ближайшими по сетке соседями s_j –J_{ij}=–1;

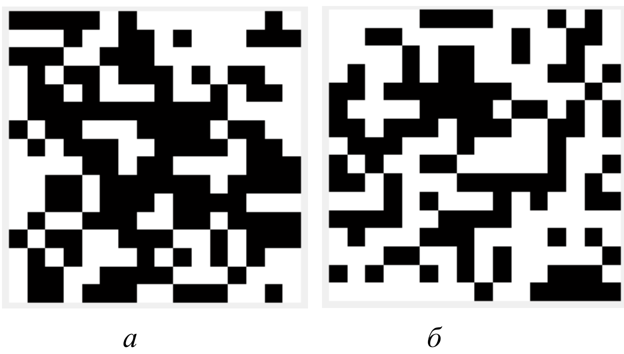


Рис. 7. Начальные финансовые позиции агентов в момент времени *t*=0 – *а;* позиции агентов с течением времени *t*=1000 – *б* (при значениях модельных параметров: *Ns*=128, $J_{ij}=-1$, α=0.5, *b*=0.1).

сила внешнего воздействия на финансовую систему – α=0.5;

интенсивность реакции на изменение финансовой позиции отдельного агента – *b*=0.1.

Модельные представления начальных финансовых позиций агентов и их позиций с течением времени продемонстрированы на рис. 7. Начальные позиции агентов – случайные. Незакрашенными ячейками показаны агенты, готовые продавать, а закрашенными – готовые покупать.

Результаты поставленного эксперимента позволяют сделать вывод, что при $J_{ij}<0$, независимо от начального положения агентов на рынке, система принимает «антиферромагнитное» состояние, т.е. агенты играют друг против друга и практически не взаимодействуют. Это состояние финансового рынка наименее выгодно.

Рис. 8 отражает динамику общей тенденции поведения финансового рынка при данном выгодном состоянии финансовых позиций агентов-инвесторов.

Таким образом, при $J_{ij}=-1$ реализуется наименее выгодное состояние финансового рынка, так как ему соответствует «антиферромагнитное» состояние системы (агенты практически не взаимодействуют).

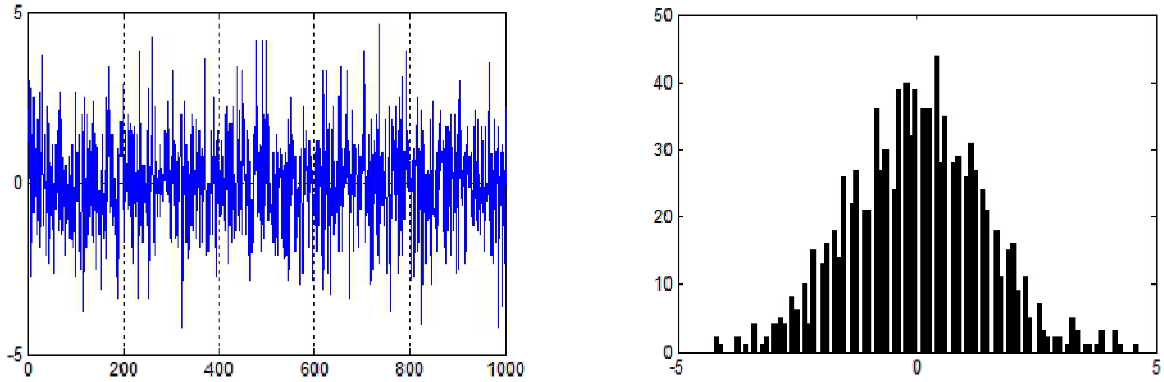


Рис. 8. Общая тенденция поведения финансовой системы – *а* и гистограмма динамического отклика финансовой системы – *б* (при значениях модельных параметров: *Ns*=128, $J_{ij} = -1$, α=0.5, β=0).

Заключение

Таким образом, на основе базовой модели финансовых рынков и концепции модели Изинга сформулирована математическая постановка задачи моделирования стохастического поведения финансовых рынков и построена вычислительная схема для ее реализации. Формализован алгоритм и проведена программная реализация модели в ППП Matlab 2010b. Представлены результаты вычислительных экспериментов по расчету характеристик поведения финансовых рынков при различных наборах модельных параметров.

1. Mantegna, R.N., Stanley, H.E. Introduction to econophysics: correlation and complexity in finance. – Cambridge: Cambridge University Press, 1999. – 143 p.

2. Chowdhury, D., Stauffer, D. A generalized spin model of financial markets // Quantitative finance paper cond-mat / 9810162, 1998. – arXiv.org.

3. Bornholdt, S. Expectation Bubbles in a Spin Model of Markets: In-termittency from Frustration across Scales // International Journal of Modern Physics A. – 2001. – V. 12 (5). – P. 667-674.

4. Sornette, D. Physics and Financial Economics (1776-2014). Puzzels, Ising and agent-based models. – Geneva: Swiss Finance Institute, 2014. – 76 p.

5. Sieczka, P., Holyst, J.A. A threshold model of financial markets // ACTA PHYSICA POLONICA A, 2008. – V. 114, № 3. – P. 525-530.

6. Dvorak, P. Ising model in finance: from microscopic rules to macroscopic phenomena // Bachelor thesis – Prague: Charles University, 2012. – 34 p.

7. Прудников, В.В., Вакилов, А.Н., Прудников, П.В. Фазовые переходы и методы их компьютерного моделирования. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. – 224 с.

8. Поршнев, С.В. Компьютерное моделирование физических процессов в пакете MATLAB. – М.: Горячая линия – Телеком, 2003. – 592 с.

9. Детченков, И.Л., Масловская, А.Г. Применение алгоритма Метрополиса в задачах расчета характеристик ферромагнитного фазового перехода второго рода //Вестник Амурского гос. ун-та. Естественные и экономические науки. – 2013. – № 63. – С. 22-26.

10. Детченков, И.Л., Рвачева, М.И., Масловская, А.Г. Применение метода Монте-Карло в задачах моделирования фазовых переходов // Вестник Амурского гос. ун-та. Естественные и экономические науки . – 2015. – № 71. – С. 60-69.