УДК 514.13

А.П. Филимонова, Т.А. Юрьева

ЛИНЕАРИЗАЦИЯ КАК МЕТОД ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ДЛЯ НЕКОТОРОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НА СФЕРЕ

В статье приводится доказательство теоремы, обобщающей теоремы единственности решения квазилинейных уравнений на сфере как двумерном многообразии в пространствах постоянной кривизны, связанных с восстановлением поверхностей, гомеоморфных сфере, с заданной функцией средней кривизны.

Ключевые слова: положительно эллиптичное квазилинейное уравнение, кривизна поверхности, двумерное многообразие, квадратичная форма.

LINEARIZATION METHOD PROOF FOR THE UNIQUENESS OF THE SOLUTION FOR SOME CLASSES OF NONLINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS ON SPHERE

The article provides the proof of the theorem which generalizes the uniqueness of quasi-linear equations solutions on the sphere as a two-dimensional manifold in spaces of constant curvature, related to the restoration of surfaces, homeomorphic to a sphere with a predetermined function of the mean curvature.

Key words: positive quasilinear elliptic equations, the curvature of the surface, two-dimensional manifold, quadratic form.

Пусть дана сфера S_1^2 единичного радиуса. Рассмотрим ее как двумерное многообразие и введем локальные географические координаты *u*, *v*. На этой сфере рассмотрим квазилинейное относительно функции ρ(*u*, *v*) дифференциальное уравнение вида

$$
\begin{aligned}
&f(\rho)d(u,v)\cdot(\rho_{11}\rho_v^2-2\rho_{12}\rho_u\rho_v+\rho_{22}\rho_u^2)+\varphi(\rho)\cdot(\rho_{11}\varphi_1(u,v)+\rho_{22}\varphi_2(u,v))+\\
&+D(u,v,\rho,\rho_u,\rho_v)=\psi((u,v,\rho)\cdot D_1(u,v,\rho,\rho_u,\rho_v),
\end{aligned} \tag{1}
$$

где $(u,v)\in S_1^2$, $\rho\in R^+$, $\rho_{ij}(i,j\in\{1,2\})$ – вторые ковариантные производные функции ρ(*u*, *v*) относительно метрики единичной сферы S_1^2.

Наложим условия на входящие в (1) функции: $f(\rho)>0$, $d(u,v)>0$, $\varphi(\rho)>0$, $\varphi_1(u,v)>0$, $\varphi_2(u,v)>0$.

Уравнение (1) является положительно эллиптичным на решении ρ=ρ(*u*, *v*). В самом деле, рассматривая квадратичную форму

$$A\xi^2-2B\xi\eta+C\eta^2,$$

где $A=f(\rho)d(u,v)\cdot\rho_v^2+\varphi(\rho)\varphi_1(u,v)$; $B=f(\rho)d(u,v)\rho_u\rho_v$; $C=f(\rho)d(u,v)\rho_u^2+\varphi(\rho)\varphi_2(u,v)$,
имеем дискриминант

$$AC-B=f(\rho)d(u,v)\cdot\rho_v^2\varphi(\rho)\varphi_2(u,v)+\varphi(\rho)\varphi_1(u,v)(f(\rho)d(u,v)\rho_u^2+\rho\varphi_2(u,v))+$$

$+\varphi^2(\rho)\varphi_1(u,v)\varphi_2(u,v)>0$ и A>0 в силу наложенных условий на функции в уравнении (1).

Введем функции $\Theta(\rho)=\sqrt{\dfrac{\varphi(\rho)}{f(\rho)}}$ и $\omega=\int\dfrac{d\rho}{\Theta(\rho)}$.

Теорема. Уравнение (1) имеет на S_1^2 не более одного решения $\rho=\rho(u, v)$ при условиях:

1) $f\in C^2$, $\varphi\in C^2$, $D\in C^2$, $D_1\in C^1$, $\psi\in C^1$,

2) $\left[\omega_u^2\varphi_1(u,v)+\omega_v^2\varphi_2(u,v)\right]\cdot\Theta'(\rho)+\left[\dfrac{D-\psi D_1}{\Theta\varphi}\right]_\rho^{/}\le 0$.

Здесь $D=D(u,v,\omega,\omega_u,\omega_v)$, $D_1=D_1(u,v,\omega,\omega_u,\omega_v)$.

Доказательство В (1) произведем замену переменной: $\omega=\int\dfrac{d\rho}{\Theta(\rho)}$.

Выразим $\rho_{11},\rho_{12},\rho_{22},\rho_u,\rho_v$:

$\rho_u=\omega_u\Theta(\rho)$, $\rho_v=\omega_v\Theta(\rho)$, $\rho_{11}=\omega_{11}\Theta(\rho)+\omega_u^2\Theta'(\rho)\Theta(\rho)$, $\rho_{12}=\omega_{12}\Theta(\rho)+\omega_u\omega_v\Theta'(\rho)\Theta(\rho)$,

$\rho_{22}=\omega_{22}\Theta(\rho)+\omega_v^2\Theta'(\rho)\Theta(\rho)$.

Из (1) и полученной замены следует, что функция удовлетворяет положительно эллиптическому уравнению:

$$\begin{aligned}&\omega_{11}(\omega_v^2 d(u,v)+\varphi_1(u,v))-2\omega_{12}\omega_u\omega_v d(u,v)+\omega_{22}(\omega_u^2 d(u,v)+\varphi_2(u,v))+\\&+\Theta'(\rho)[\omega_u^2\varphi_1(u,v)+\omega_v^2\varphi_2(u,v)]+\frac{D(u,v,\omega,\omega_u,\omega_v)}{\Theta(\rho)\varphi(\rho)}=\psi(u,v,\rho)\frac{D_1(u,v,\omega,\omega_u,\omega_v)}{\Theta(\rho)\varphi(\rho)},\end{aligned}\tag{2}$$

где $\rho=\rho(\omega(u,v))$.

Предположим, что (2) имеет два различных решения: $\tilde\omega$ и ω, а $\delta=\tilde\omega-\omega$ – их разность. Тогда $\tilde\omega_u=\delta_u+\omega_u$, $\tilde\omega_v=\delta_v+\omega_v$, $\tilde\omega_{11}=\delta_{11}+\omega_{11}$, $\tilde\omega_{12}=\delta_{12}+\omega_{12}$, $\tilde\omega_{22}=\delta_{22}+\omega_{22}$.

Используя эти соотношения, можно показать, что δ удовлетворяет уравнению:

$$\begin{aligned}&\delta_{11}(\omega_v^2 d(u,v)+\varphi_1(u,v))-2\delta_{12}\omega_u\omega_v d(u,v)+\delta_{22}(\omega_u^2 d(u,v)+\varphi_2(u,v))+\Phi_1(u,v)\delta_u+\\&+\Phi_2(u,v)\delta_v+\left[\frac{\tilde D-\tilde\psi\tilde D_1}{\Theta(\tilde\rho)\varphi(\tilde\rho)}-\frac{D-\psi D_1}{\Theta(\rho)\varphi(\rho)}\right]=0.\end{aligned}\tag{3}$$

Здесь $\tilde D=D(u,v,\tilde\rho,\tilde\omega_u,\tilde\omega_v)$, $\tilde D_1=D_1(u,v,\tilde\rho,\tilde\omega_u,\tilde\omega_v)$, $\tilde\psi=\psi(u,v,\tilde\rho)$, $\tilde\rho=\rho(\tilde\omega)$.

Применим теорему о конечных приращениях к функциям, стоящим в квадратных скобках уравнения (3). Получим:

$$\begin{aligned}&\delta_{11}(\omega_v^2 d(u,v)+\varphi_1(u,v))-2\delta_{12}\omega_u\omega_v d(u,v)+\delta_{22}(\omega_u^2 d(u,v)+\varphi_2(u,v))+\Phi_1(u,v)\delta_u+\\&+\Phi_2(u,v)\delta_v+\left\{\left[\omega_u^2\varphi_1(u,v)+\omega_v^2\varphi_2(u,v)\right]\cdot\hat\Theta'(\rho)\hat\Theta(\rho)+\left[\frac{D-\psi D_1}{\Theta\varphi}\right]_\rho^{/}\cdot\hat\Theta(\rho)\right\}\cdot\delta=0.\end{aligned}\tag{4}$$

Здесь знак ^ обозначает, что соответствующая функция вычисляется в промежуточной точке.

Из условий теоремы: $\Theta(\rho)=\sqrt{\dfrac{\varphi(\rho)}{f(\rho)}}>0$, $\left[\omega_u^2\varphi_1(u,v)+\omega_v^2\varphi_2(u,v)\right]\cdot\Theta'(\rho)+\left[\dfrac{D-\psi D_1}{\Theta\varphi}\right]_\rho^{/}\le 0$.

Поэтому (4) является однородным положительно эллиптичным уравнением относительно δ, в (4) знак при δ неположителен. В силу принципа максимума [2], рассмотренного для уравнения (4) на сфере S_1^2, имеем: $\delta\equiv 0$. Поэтому $\tilde\rho-\rho=\dfrac{\tilde\omega-\omega}{\hat\omega'\rho}\equiv 0$, следовательно, $\tilde\rho\equiv\rho$. Теорема доказана.

Доказанная теорема является обобщением теорем единственности решения квазилинейных уравнений на сфере как двумерном многообразии в пространствах постоянной кривизны, связанных с восстановлением поверхностей, гомеоморфных сфере, с заданной функцией средней кривизны.

Следствие 1. Пусть в евклидовом пространстве E^3 $\rho=\rho(u,\ v)$ задает гомеоморфную S_1^2 поверхность F. Пусть задана функция $H(u,v,\rho)\in S_1^2\times R^+$. Тогда существует не более одной поверхности F, средняя кривизна которой в каждой точке совпадает со значением функции H в этой точке, если выполняются условия: 1) $H\in C^1$, 2) $(H\rho)'_\rho\geq 0$.

Задача сводится к нахождению достаточных условий единственности решения положительно эллиптичного квазилинейного уравнения [1]:

$$\rho_{11}\frac{\rho_v^2+\rho^2\sin^2 u}{\rho}-2\rho_{12}\frac{\rho_u\rho_v}{\rho}+\rho_{22}\frac{\rho_u^2+\rho^2}{\rho}-3\rho_u^2\sin^2 u-3\rho_v^2-2\rho^2\sin^2 u=$$

$$=2H(u,v,\rho)\frac{(\rho_u^2\sin^2 u+\rho_v^2+\rho^2\sin^2 u)^{3/2}}{\sin u}.$$ Атлас на S_1^2 выбран так, что локальные географические координаты u, v каждой карты удовлетворяют условию $\sin u\geq x>0$, а $\rho_{11}=\rho_{uu}$, $\rho_{12}=\rho_{uv}-$ $-\dfrac{\cos u}{\sin u}\rho_v$, $\rho_{22}=\rho_{vv}+\sin u\cos u\rho_u$.

Здесь $f(\rho)=\dfrac{1}{\rho}>0$, $d(u,v)=1$, $\varphi(\rho)=\rho>0$, $\varphi_1(u,v)=\sin^2 u>0$, $\varphi_2(u,v)=1$,

$$\Theta(\rho)=\sqrt{\frac{f(\rho)}{\varphi(\rho)}}=\rho>0,\ \Theta'(\rho)=1,\ \Theta''(\rho)=0,\ \left(\frac{D(u,v,\omega,\omega_u,\omega_v)-\psi(u,v,\rho)D_1(u,v,\omega,\omega_u,\omega_v)}{\Theta(\rho)\varphi(\rho)}\right)'_\rho=$$

$$=\left\{(-3\omega_u^2\rho^2\sin^2 u-3\omega_v^2\rho^2-2\rho^2\sin^2 u-2H(u,v,\rho)\frac{(\omega_u^2\rho^2\sin^2 u+\omega_v^2\rho^2+\rho^2\sin^2 u)^{3/2}}{\sin u\,\rho}\right\}'=$$

$$=-2(\omega_u^2\sin^2 u+\omega_v^2+\sin^2 u)^{3/2}\frac{1}{\sin u}\cdot(H\rho)'_\rho\leq 0,\ \text{так как } (H\rho)'_\rho\geq 0.$$

Результат совпадает с результатом работы [2].

Следствие 2. S_1^2 – двумерное многообразие в пространстве Лобачевского H^3 (эллиптическом пространстве Э^3); $\rho=\rho(u,\ v)$ задает гомеоморфную S_1^2 поверхность F. Пусть задана функция $H(u,v,\rho)\in S_1^2\times R^+$. Тогда существует не более одной поверхности F, средняя кривизна которой в каждой точке совпадает со значением функции в этой точке, если выполняются условия: 1) $H\in C^1$, 2) $(Hth\rho)'_\rho\geq 0$ (для пространства H^3) и: 1) $H\in C^1$, 2) $(Htg\rho)'_\rho\geq 0$ (для пространства Э^3).

Рассмотрим только случай пространства H^3 (для Э^3 все рассуждения аналогичны).

В случае пространства H^3 задача сводится к нахождению достаточных условий единственности решения положительно эллиптичного квазилинейного уравнения, полученного в работе [3]:

$$\rho_{11}(cth\rho\cdot\rho_v^2+sh\rho\cdot ch\rho)-2\rho_{12}\rho_u\rho_v cth\rho+\rho_{22}(cth\rho\cdot\rho_u^2+sh\rho\cdot ch\rho\cos^2 v)-$$

$$-(\rho_u^2+\rho_v^2\cos^2 v)(ch^2\rho+2ch\rho)-2\cos^2 v\,sh^2\rho\cdot ch\rho=2H\frac{(\rho_u^2+\rho_v^2\cos^2 v+sh^2\rho\cdot\cos^2 v)^{3/2}}{\cos v},\ \cos v\geq 0,$$

$$\rho_{11}=\rho_{uu}-\sin v\cos v\rho_v,\ \rho_{12}=\rho_{uv}+\frac{\sin v}{\cos v}\rho_u,\ \rho_{22}=\rho_{vv}.$$

Здесь $f(\rho)=cth\rho>0$, $\varphi(\rho)=sh\,\rho\,ch\,\rho>0$, $\Theta(\rho)=\sqrt{\dfrac{f(\rho)}{\varphi(\rho)}}=sh\rho>0$, $d(u,v)=1$, $\Theta'(\rho)=ch\rho$, $\Theta''(\rho)=sh\rho$,

$$\frac{D}{\Theta\varphi}=-\frac{(\omega_u^2 sh^2\rho+\omega_v^2 sh^2\rho\cos^2 v)(ch^2\rho+2ch\rho)+2\cos^2 v sh^2\rho\cdot ch\rho}{sh^2\rho\cdot ch\rho}=-2\omega_u^2 ch\rho-\omega_v^2\cos^2 v ch\rho-$$

$$-2\omega_u^2-\omega_v^2\cos^2 v-2\cos^2 v.$$

$$\left[\omega_u^2\varphi_1(u,v)+\omega_v^2\varphi_2(u,v)\right]\cdot\Theta'(\rho)+\left[\frac{D}{\Theta\varphi}\right]_\rho^{/}=\left[\omega_u^2+\omega_v^2\cos^2 v\right]sh\rho-\left[\omega_u^2+\omega_v^2\cos^2 v\right]sh\rho=0.$$

$$\left[-\psi\frac{D}{\Theta\varphi}\right]_\rho^{/}=\left[\frac{-2H(\omega_u^2 sh^2\rho+\omega_v^2 sh^2\rho\cos^2 v+sh^2\rho\cos^2 v)^{3/2}}{sh^2\rho ch\rho\cos v}\right]_\rho^{/}=$$

$$=\left(-2H\frac{sh\rho}{ch\rho}\right)_\rho^{/}\cdot\frac{\omega_u^2+\omega_v^2\cos^2 v+\cos^2 v}{\cos v}\le 0 \text{ при условии } (Hth\rho)'_\rho\ge 0.$$

Единственность решения показана. Теорема единственности в [3] не доказана.

Для эллиптического пространства результат получается аналогичным способом, условия единственности $(Htg\rho)'_\rho\ge 0$, $H\in C^1$. В работах по дифференциальной геометрии не рассматривался.

---

1. Бакельман, И.Я., Кантор, Б.Е. Существование гомеоморфной сферы поверхности в евклидовом пространстве с заданной средней кривизной // Геометрия и топология: Сб. научн. трудов. – ЛГПИ им. А.И. Герцена. – Л., 1974. – Вып. 1. – С. 3-10.

2. Кантор, Б.Е. О единственности гомеоморфной сферы гиперповерхности с данной функцией средней кривизны в евклидовом пространстве // Геометрия: Сб. научн. трудов. – ЛГПИ им. А.И. Герцена. – Л., 1975. – С. 59-61.

3. Трайнин, Я. Л. Аналитическая геометрия в пространстве Лобачевского. – Новосибирск, 1974. – 285 с.