УДК 514.742.4

И.П. Попов

ПРИМЕНЕНИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА ДЛЯ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ФУНКЦИИ ПО ЕЕ ГРАДИЕНТУ

Предложен способ восстановления функции по ее градиенту, в основу которого положено суммирование неопределенных интегралов от частных производных функции и исключение лишних слагаемых.

Ключевые слова: градиент, функция, частная производная, интеграл, переменная.

THE APPLICATION OF THE INDEFINITE INTEGRAL TO RECONSTRUCTING A FUNCTION FROM ITS GRADIENT

The paper presents a method of reconstructing a function from its gradient. The method is based on the summation of indefinite integrals from partial derivatives of a function and elimination of redundant summands.

Key words: gradient, function, partial derivative, integral, variable.

Актуальность задачи определения функции по ее градиенту достаточно показать на примере пространственного распределения сил, которое является градиентом энергии соответствующего поля [1-5].

Применительно к большей части приложений можно ограничиться рассмотрением операций на пространстве векторных полей и гладких функций в $\mathbb{R}^3$.

Существует несколько способов [6–8] отыскания функции по ее градиенту

$$\operatorname{grad} f = \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right). \quad (1)$$

Наиболее простой способ [9] заключается в вычислении криволинейного интеграла

$$f = \int_{x_0, y_0, z_0}^{x, y, z} \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial z}{\partial z} dz =$$

$$\int_{x_0}^{x} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y_0, z_0) dx + \int_{y_0}^{y} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z_0) dy + \int_{z_0}^{z} \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) dz.$$

Достоинством этого метода является компактность, недостатком – необходимость выбора начальной точки интегрирования (x_0, y_0, z_0). Последнее сопряжено с произволом, который может отразиться на виде окончательного решения. Кроме того, в ряде случаев это может быть сопряжено с трудностями, вследствие чего представлять собой дополнительную задачу.

Пример 1. Для двухмерного случая

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \arcsin y + \ln(y-1), \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^2}{\sqrt{1-y^2}} + \frac{x}{y-1}$$

возникает проблема с выбором y_0, поскольку должны одновременно выполняться условия: $y \le 1$ и $y > 1$.

Есть способы (например, [10]), лишенные этого изъяна. Они заключаются в подборе вспомогательных функций. Их существенные недостатки – трудоемкость и громоздкость.

Предлагаемый нами подход свободен от недостатков указанных способов. По трудоемкости и компактности он сопоставим с первым способом, и в нем нет необходимости определения исходной точки интегрирования.

Теорема. *Функция f может быть восстановлена по ее градиенту* (1) *в соответствии с формулой:*

$$f = \int \frac{\partial f}{\partial x} dx + \int \frac{\partial f}{\partial y} dy + \int \frac{\partial f}{\partial z} dz - 2V_{xyz} - V_{xy} - V_{xz} - V_{yz} + C =$$
$$= P_{xyz}(x,y,z) + P_{xy}(x,y) + P_{xz}(x,z) + P_x(x) + Q_{xyz}(x,y,z) + Q_{xy}(x,y) + Q_{yz}(y,z) + Q_y(y) + \tag{2}$$
$$+ R_{xyz}(x,y,z) + R_{xz}(x,z) + R_{yz}(y,z) + R_z(z) - 2V_{xyz} - V_{xy} - V_{xz} - V_{yz} + C.$$

При этом

$$P_{xyz} = Q_{xyz} = R_{xyz} = V_{xyz}, \tag{3}$$

$$P_{xy} = Q_{xy} = V_{xy}, \tag{4}$$

$$P_{xz} = R_{xz} = V_{xz}, \tag{5}$$

$$Q_{yz} = R_{yz} = V_{yz}. \tag{6}$$

Величины (3) – (6) представляют собой функции, содержащие переменные, указанные в индексах.

Доказательство. Очевидны равенства:

$$\int \frac{\partial f}{\partial x} dx = P_{xyz}(x,y,z) + P_{xy}(x,y) + P_{xz}(x,z) + P_x(x),$$

$$\int \frac{\partial f}{\partial y} dy = Q_{xyz}(x,y,z) + Q_{xy}(x,y) + Q_{yz}(y,z) + Q_y(y),$$

$$\int \frac{\partial f}{\partial z} dz = R_{xyz}(x,y,z) + R_{xz}(x,z) + R_{yz}(y,z) + R_z(z),$$

$$\frac{\partial^3}{\partial x \partial y \partial z} \int \frac{\partial f}{\partial x} dx = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z} = \frac{\partial^3 P_{xyz}}{\partial x \partial y \partial z},$$

$$\frac{\partial^3}{\partial x \partial y \partial z} \int \frac{\partial f}{\partial y} dy = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z} = \frac{\partial^3 Q_{xyz}}{\partial x \partial y \partial z},$$

$$\frac{\partial^3}{\partial x \partial y \partial z} \int \frac{\partial f}{\partial z} dz = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z} = \frac{\partial^3 R_{xyz}}{\partial x \partial y \partial z}.$$

Отсюда непосредственно следует (3):

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \int \frac{\partial f}{\partial x} dx = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 P_{xyz}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 P_{xz}}{\partial x \partial y},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \int \frac{\partial f}{\partial y} dy = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 Q_{xyz}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 Q_{xy}}{\partial x \partial y}.$$

Отсюда, с учетом (3), следует (4):

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \int \frac{\partial f}{\partial x} dx = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 P_{xyz}}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 P_{xz}}{\partial x \partial z},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial z}\int \frac{\partial f}{\partial z} dz = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 R_{xyz}}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 R_{xz}}{\partial x \partial z}.$$

Отсюда, с учетом (3), следует (5):

$$\frac{\partial^2}{\partial y \partial z}\int \frac{\partial f}{\partial y} dy = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 Q_{xyz}}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 Q_{yz}}{\partial y \partial z},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y \partial z}\int \frac{\partial f}{\partial z} dz = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 R_{xyz}}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 R_{yz}}{\partial y \partial z}.$$

Отсюда, с учетом (3), следует (6).

Координаты градиента функции (2) можно вычислить следующим образом.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\int \frac{\partial f}{\partial x} dx + Q_{xyz} + Q_{xy} + Q_{yz} + Q_y + \right.$$

$$\left. + R_{xyz} + R_{xz} + R_{yz} + R_z - 2V_{xyz} - V_{xy} - V_{xz} - V_{yz} + C \right) = \frac{\partial f}{\partial x}.$$

Слагаемые в скобках, являющиеся функциями от *x*, кроме первого, взаимно уничтожаются. Частные производные по *x* от остальных равны нулю.

Аналогичным образом обстоит дело с частными производными по *y* и *z*.

Таким образом, градиент правой части (2) равен (1), следовательно, правая часть (2) представляет собой восстановленную функцию *f*. Теорема доказана.

Следствие.

$$f = V_{xyz} + V_{xy} + V_{xz} + V_{yz} + V_x + V_y + V_z + C. \tag{7}$$

Здесь $V_x = P_x(x)$, $V_y = Q_y(y)$, $V_z = R_z(z)$.

Пример 2.

$$\operatorname{grad} f = \left(\frac{z}{y} + \sin y + \frac{z}{x} + 2x\right)\mathbf{i} + \left(x\cos y - \frac{xz}{y^2} + 2yz^3 + 3y^2\right)\mathbf{j} + \left(\frac{x}{y} + \ln x + 3y^2z^2 - e^z\right)\mathbf{k}$$

$$f = \left(\frac{xz}{y} + x\sin y + z\ln x + x^2\right) + \left(\frac{xz}{y} + x\sin y + y^2z^3 + y^3\right) +$$

$$+ \left(\frac{xz}{y} + z\ln x + y^2z^3 - e^z\right) - 2\frac{xz}{y} - x\sin y - z\ln x - y^2z^3 + C =$$

$$= \frac{xz}{y} + x\sin y + z\ln x + y^2z^3 + x^2 + y^3 - e^z + C.$$

Здесь

$$P_{xyz} = Q_{xyz} = R_{xyz} = V_{xyz} = \frac{xz}{y}, \quad P_{xy} = Q_{xy} = V_{xy} = x\sin y, \quad P_{xz} = R_{xz} = V_{xz} = z\ln x,$$

$$Q_{yz} = R_{yz} = V_{yz} = y^2z^3, \quad P_x = V_x = x^2, \quad Q_y = V_y = y^3, \quad R_z = V_z = e^z.$$

Вычисление по формуле (7) еще компактнее.

---

1. Попов, И.П. Приложение мнимых векторов к моделированию абстрактного силового поля // Вестник Амурского гос. ун-та. – 2016. – Вып. 73. – С. 10-24.

2. Сельвинский, В.В. Сдвиг с места твердого тела с распределенным контактом // Вестник АмГУ. – 2011. – № 53. – С. 3-6.

3. Попов, И.П. О некоторых аспектах магнитоэлектрического взаимодействия // Вестник Челябинского гос. ун-та. – 2009. – Вып. 5, № 24(162). – С. 34-39.

4. Попов, И.П. О пространственной конфигурации вихревого электрического поля // Вестник Курганского гос. ун-та.– 2009. – Вып. 2, № 1 (15). – С. 50-51.
5. Попов, И.П. Дуально-инверсный аналог силы Ампера для магнитопровода с изменяющимся магнитным потоком, находящегося в электрическом поле // Вестник Курганского гос. ун-та. – 2009. – Вып. 2, № 1 (15). – С. 51-52.
6. Попов, И.П. Разновидности оператора набла // Вестник Амурского гос. ун-та. – 2015. – Вып. 71. – С. 20-32.
7. Попов, И.П. О некоторых операциях над векторами // Вестник Волгоградского гос. ун-та. – Серия 1: Математика. Физика. – 2014. – № 5 (24). – С. 55-61.
8. Попов, И.П. Поверхностные градиент, дивергенция и ротор // Вестник Псковского гос. ун-та. – Естественные и физико-математические науки. – 2014. – Вып. 5. – С. 159-172.
9. Богданов, Ю.С. Лекции по математическому анализу. – Ч. 2. – Минск: Изд-во БГУ, 1978. – 384 с.
10. Пискунов, Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов. – Т. 2. – Изд. 13-е. – М.: Наука, 1985. – 560 с.

УДК 517.922.519.21

В.А. Труфанов, Т.В. Труфанова, М.Д. Штыкин

ДЕЙСТВИЕ ЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРА НА ПРОЦЕСС $\xi_\lambda(t)$

В статье рассматривается нахождение решения линейного неоднородного дифференциального уравнения в виде осциллятора, правой частью которого является процесс $\xi_\lambda(t)$

Ключевые слова: R-гармонический, случайный процесс, осциллятор, линейный оператор, дифференциальное уравнение.

EFFECT OF THE LINEAR OPERATOR ON PROCESS $\xi_\lambda(t)$

The paper deals with the solution of a linear nonhomogeneous differential equation in the form of an oscillator, the right part of which is the process $\xi_\lambda(t)$**.**

Key words: R-harmonic, casual process, oscillator, linear operator, differential equation.

В приложениях приходится исследовать случайные процессы, получающиеся в результате применения более сложных математических операций (символически обозначаемые оператором) к случайным процессам, характеристики которых известны.

Важный класс линейных операторов можно представить в виде:

$$\eta(t) = \int_{t_0}^{t} K(t,t_1)\xi(t_1)dt_1, \tag{1}$$

где $\xi(t_1)$ – процесс, к которому применяется данный оператор; $K(t,t_1)$ – известная функция, вид которой и определяет свойство оператора. В частном случае, когда функция $K(t,t_1)$ является функцией разности своих аргументов, формула (1) принимает вид: