УДК 514.13

А.П. Филимонова, Т.А. Юрьева

ОБОБЩЕНИЕ ЗАДАЧИ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ПОВЕРХНОСТИ С ЗАДАННОЙ ГАУССОВОЙ КРИВИЗНОЙ В ПРОСТРАНСТВЕ ПОСТОЯННОЙ КРИВИЗНЫ

В статье приводится доказательство теоремы, обобщающей теоремы единственности решения отрицательно эллиптичных уравнений на сфере как двумерном многообразии в пространствах постоянной кривизны, связанных с восстановлением поверхностей, гомеоморфных сфере, с заданной функцией гауссовой кривизны.

Ключевые слова: отрицательно эллиптичное уравнение, кривизна поверхности, двумерное многообразие, квадратичная форма.

GENERALIZATION OF TASK OF RESTORING SURFACE WITH THE GIVEN GAUSSIAN CURVATURE IN CONSTANT CURVATURESPACE

The article provides theorem proving. Generalized theorem of uniqueness of solution of adversely elliptical equations on the sphere as a two-dimensional manifold in constant curvature spaces, related to the restoration of surfaces, homeomorphic sphere with a given function of the Gaussian curvature.

Key words: adversely elliptical equation, curvature of surface, two-dimensional manifold, quadratic form.

Рассмотрим трехмерное гиперболическое пространство H^3 постоянной отрицательной кривизны. Зафиксируем в нем некоторую точку *O*. Пусть, далее, S_1^2 сфера единичного радиуса с центром в этой точке. Будем рассматривать класс регулярных выпуклых гомеоморфных сфере S_1^2 поверхностей, звездных относительно точки *O*. Произвольную поверхность этого класса можно задать уравнением: F: $\rho=\rho(u, v)$, где ρ, u, v – сферические координаты в H^3.

Линейный элемент пространства H^3 в сферических координатах имеет вид: $ds^2 = d\rho^2 + sh^2\rho\cos^2 v du + sh^2\rho dv^2$ (постоянная k пространства H^3взята равной единице).

Тогда коэффициенты первой квадратичной формы поверхности F имеют вид: $g_{11} = \rho_u^2 + sh^2\rho\cos^2 v$, $g_{12} = \rho_u\rho_v$, $g_{22} = \rho_v^2 + sh^2\rho$. Известно, что гауссова (внутренняя) кривизна поверхности выражается через коэффициенты ее первой квадратичной формы и их производные следующим образом [2]:

$$K_{\text{int}} = \frac{R_{1212}}{\det\left\|g_{ij}\right\|},$$

где $R_{1212} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{12}}{\partial v\partial u} + \frac{\partial^2 g_{21}}{\partial u\partial v} - \frac{\partial^2 g_{11}}{\partial v^2} - \frac{\partial^2 g_{22}}{\partial u^2}\right) + g^{em}\cdot\left(\Gamma_{2m1}\cdot\Gamma_{1e2} - \Gamma_{2m2}\cdot\Gamma_{1e1}\right),$

$\Gamma_{i\alpha j}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial g_{i\alpha}}{\partial x^j}+\dfrac{\partial g_{\alpha j}}{\partial x^i}-\dfrac{\partial g_{ij}}{\partial x^\alpha}\right)$, $x^1=u$, $x^2=v$; $i, j, \alpha\in\{1, 2\}$; g^{em} – элементы матрицы $\left\|g_{em}\right\|^{-1}$; $e, m\in\{1, 2\}$.

Рассмотрим S_1^2 как двумерное многообразие и выберем атлас так, чтобы в локальных координатах u и v каждой карты выполнялось неравенство $\cos v\geq x>0$.

Тогда, если в $H^3\backslash\{0\}$ определена функция $K_{\text{int}}(u, v, \rho)$, то $\rho=\rho(u, v)$, задающая поверхность F, в каждой точке которой гауссова кривизна равна значению функции K_{int} в той же точке, является решением уравнения, которое на сфере S_1^2 имеет следующий вид:

$$\begin{gathered}\rho_{11}\rho_{22}-\rho_{12}^2\left(2cth\rho\cdot\rho_v^2+sh\rho\cdot ch\rho\right)+2\rho_{12}\cdot 2\rho_u\rho_v\cdot cth\rho-\rho_{22}\times\\ \times\left(2cth\rho\cdot\rho_u^2+sh\rho ch\rho\cos^2 v\right)-\left(\rho_v^2\cos v+\frac{\rho_u^2}{\cos v}\right)^2+2\rho_u^2+2\rho_v^2\cos^2 v+sh^2\rho\cos^2 v=\\ =K_{\text{int}}(u,v,\rho)\cdot\frac{\left(\rho_v^2\cos^2 v+\rho_u^2+sh^2\rho\cos^2 v\right)^2}{\cos^2 v}.\end{gathered}\tag{1}$$

Здесь ρ_{ij} ($i, j\in\{1, 2\}$) – вторые ковариантные производные функции $\rho(u, v)$ относительно метрики единичной сферы S_1^2 [3].

Таким образом, геометрическая задача о восстановлении поверхности F в пространстве H^3, гауссова кривизна которой в каждой точке равна значению K_{int} в той же точке, сводится к нахождению достаточных условий существования и единственности решения дифференциального уравнения Монжа – Ампера (1).

Уравнение (1) является отрицательно эллиптичным уравнением Монжа – Ампера при условии: $K_{\text{int}}>-1$ ($K_{\text{ext}}>0$) [3].

Единственность замкнутой выпуклой поверхности с данной гауссовой кривизной как функцией точки пространства H^3 выражается теоремой [3]:

Теорема 1. Пусть в $H^3\backslash\{0\}$ задана функция $K_{\text{int}}(u, v, \rho)\in C^1\left(S_1^2\times R^+\right)$, удовлетворяющая следующим условиям:

1) $K_{\text{int}}>-1$;

2) $\left[(K_{\text{int}}+1)sh^2\rho ch^2\rho\right]'_\rho\leq 0$.

Тогда существует не более одной поверхности F: $\rho=\rho(u, v)$, в каждой точке которой гауссова кривизна совпадала бы со значением функции K_{int} в этой точке.

Введем на единичной сфере S_1^2 как двумерном многообразии обобщенное уравнение Монжа – Ампера:

$$\begin{gathered}\rho_{11}\rho_{22}-\rho_{12}^2-\rho_{11}\left[f(\rho)\cdot\rho_v^2+\varphi(\rho)\cdot\varphi_1(u,v)\right]+2\rho_{12}\cdot f(\rho)\rho_u\rho_v-\rho_{22}\times\\ \times\left[f(\rho)\cdot\rho_u^2+\varphi(\rho)\cdot\varphi_2(u,v)\right]+\overline{D}(u,v,\rho,\rho_u,\rho_v)=\psi(u,v,\rho)\cdot\overline{D_1}(u,v,\rho,\rho_u,\rho_v).\end{gathered}\tag{2}$$

В уравнении (2) $(u, v)\in S_1^2$ (локальные географические координаты), ρ_{ij} ($i, j\in\{1, 2\}$) – вторые ковариантные производные функции $\rho(u, v)$ относительно метрики единичной сферы S_1^2, $\rho\in R^+$.

Наложим на функции $\varphi(\rho)$, $\varphi_1(u, v)$, $\varphi_2(u, v)$ условия: $\varphi(\rho)>0$, $\varphi_1(u, v)>0$, $\varphi_2(u, v)>0$.

Уравнение (2) является отрицательно эллиптичным уравнением Монжа – Ампера, если $AC-B^2-\overline{D}+\psi\overline{D_1}>0$. Здесь $\overline{D}=\overline{D}(u,v,\rho,\rho_u,\rho_v)$, $\overline{D_1}=\overline{D_1}(u,v,\rho,\rho_u,\rho_v)$; A, B, C являются соответственно коэффициентами при $-\rho_{11}$, $2\rho_{12}$, $-\rho_{22}$.

Действительно, квадратичная форма

$$\left(\rho_{22}-f(\rho)\cdot\rho_v^2-\varphi(\rho)\cdot\varphi_1(u,v)\right)\alpha^2-2\left(\rho_{12}-f(\rho)\rho_u\rho_v\right)\alpha\beta+$$
$$+\left(\rho_{11}-f(\rho)\cdot\rho_u^2-\varphi(\rho)\cdot\varphi_2(u,v)\right)\beta^2$$

имеет дискриминант

$$(\rho_{22}-A)(\rho_{11}-C)-(\rho_{12}-B)^2=\rho_{11}\rho_{22}-\rho_{12}^2-A\rho_{11}+2B\rho_{12}-C\rho_{22}+AC-B^2=$$
$$=AC-B^2-\overline{D}+\psi\overline{D_1},$$

что следует из уравнения (2).

В силу условия $AC-B^2-\overline{D}+\psi\overline{D_1}>0$ эта форма определена. Атак как в точке максимума функции $\rho(u, v)$ имеем $\rho_{22}\le 0$, $-A<0$ ($f(\rho)$, $\varphi(\rho)$, $\varphi_1(u, v)$ – положительные функции), то данная квадратичная форма отрицательно определена. Следовательно, уравнение (2) отрицательно эллиптично.

Докажем единственность решения обобщенного уравнение (2).

Теорема 2. На S_1^2 уравнение (2) имеет не более одного решения $\rho=\rho(u, v)$, если выполняются следующие условия:

1) $\varphi\in C$, $\psi\in C^2$, $D\in C^2$, $D_1\in C^2$;

2) $\varphi'(\rho)-f(\rho)\varphi(\rho)=C(u,v)$ (не зависит от ρ);

3) $\left[\dfrac{D-\psi D_1}{\varphi^2(\rho)}\right]'_\rho\ge 0$, $D=D(u,v,\rho,\omega_u,\omega_v)$, $D_1=D_1(u,v,\rho,\omega_u,\omega_v)$, где $\omega=\int\dfrac{d\rho}{\varphi(\rho)}$, ($\varphi(\rho)$).

Доказательство. Замена $\omega=\int\dfrac{d\rho}{\varphi(\rho)}$ влечет за собой равенства: $\rho_u=\omega_u\varphi(\rho)$, $\rho_v=\omega_v\varphi(\rho)$,

$\rho_{11}=\omega_{11}\varphi(\rho)+\omega_u^2\varphi'(\rho)\varphi(\rho)$, $\rho_{12}=\omega_{12}\varphi(\rho)+\omega_u\omega_v\varphi'(\rho)\varphi(\rho)$, $\rho_{22}=\omega_{22}\varphi(\rho)+\omega_u^2\varphi'(\rho)\varphi(\rho)$.

Вместо ρ_u, ρ_v, ρ_{11}, ρ_{12}, ρ_{22} в (2) подставим данные выражения, в результате чего после преобразований получим уравнение для ω:

$$\begin{aligned}&\omega_{11}\omega_{22}-\omega_{11}\left[\omega_v^2\varphi'(\rho)\cdot\rho_v^2-\omega_v^2\varphi(\rho)f(\rho)-\varphi_1(u,v)\right]-\\&-2\omega_{12}\left[\omega_u\omega_v\varphi'(\rho)-\varphi(\rho)f(\rho)\omega_u\omega_v\right]+\\&+\omega_{22}\left[\omega_u^2\varphi'(\rho)-\varphi(\rho)f(\rho)\cdot\omega_u^2-\cdot\varphi_2(u,v)\right]+\\&+\frac{D(u,v,\rho,\omega_u,\omega_v)}{\varphi^2(\rho)}=\psi(u,v,\rho)\cdot\frac{D_1(u,v,\rho,\omega_u,\omega_v)}{\varphi^2(\rho)},\end{aligned}\qquad(3)$$

где $\rho=\rho(\omega(u, v))$.

Уравнение (3) отрицательно эллиптично. Доказательство этого факта аналогично таковому для уравнения (2).

Допустим, что (3) имеет два различных решения $\omega=\omega(u,v)$ и $\tilde{\omega}=\tilde{\omega}(u,v)$, разность которых обозначим через $\delta:\delta=\tilde{\omega}-\omega$.

Тогда $\tilde{\omega}_u=\delta_u+\omega_u$, $\tilde{\omega}_v=\delta_v+\omega_v$, $\tilde{\omega}_{11}=\delta_{11}+\omega_{11}$, $\tilde{\omega}_{12}=\delta_{12}+\omega_{12}$, $\tilde{\omega}_{22}=\delta_{22}+\omega_{22}$. При выполнении условия теоремы $\varphi'(\rho)-f(\rho)\varphi(\rho)=C(u,v)$ (независимость данного выражения от ρ) и применении теоремы о конечных приращениях δ удовлетворяет линейному однородному уравнению:

$$\frac{1}{2}\delta_{11}\left(\tilde{\omega}_{22}+A_1+\omega_{22}+A\right)-\delta_{12}\left(\tilde{\omega}_{12}+B_1+\omega_{12}+B\right)+\frac{1}{2}\delta_{22}\left(\tilde{\omega}_{11}+C_1+\omega_{11}+C\right)+$$
$$+\Phi_1(u,v)\delta_u+\Phi_2(u,v)\delta_v+\left[\frac{D-\hat{\psi}D_1}{\varphi^2(\rho)}\right]'_\rho \hat{\varphi}(\rho)\delta=0. \quad (4)$$

В (4) A, B, C и A_1, B_1, C_1 – коэффициенты при ω_{11}, $-2\omega_{12}$, ω_{22} и $\tilde{\omega}_{11}$, $-2\tilde{\omega}_{12}$, $\tilde{\omega}_{22}$ соответственно в уравнении (3) для $\omega=\omega(u,v)$ и $\tilde{\omega}=\tilde{\omega}(u,v)$. Знак $\wedge$ означает, что соответствующая функция вычисляется в промежуточной точке.

Уравнение (4) является отрицательно эллиптичным, что обеспечивается отрицательной эллиптичностью уравнения (3) на решениях $\omega=\omega(u,v)$ и $\tilde{\omega}=\tilde{\omega}(u,v)$.

Из условия теоремы 2 $\left[\frac{D-\hat{\psi}D_1}{\varphi^2(\rho)}\right]'_\rho \hat{\varphi}(\rho)\ge 0$. В силу принципа максимума, рассмотренного для линейного однородного отрицательно эллиптичного уравнения (4) относительно δ на S_1^2 как компактном многообразии, имеем $\delta\equiv 0$. Отсюда $\tilde{\rho}-\rho=\frac{\tilde{\omega}-\omega}{\tilde{\omega}'_\rho}\equiv 0$, следовательно, $\tilde{\rho}\equiv\rho$. Единственность решения обобщенного уравнения (2) доказана.

Следствие. Допустим, что S_1^2 – единичная сфера с центром в некоторой фиксированной точке O трехмерного евклидова пространства E^3. Будем рассматривать класс регулярных выпуклых гомеоморфных S_1^2 поверхностей, звездных относительно точки O. Произвольная поверхность F этого класса задается уравнением: F: $\rho=\rho(u, v)$, где ρ, u, v – сферические координаты в E^3. Рассмотрим S_1^2 как двумерное многообразие и выберем атлас так, чтобы в локальных координатах u, v каждой карты выполнялось неравенство: $\sin u\ge x>0$. Тогда, если в $E^3\backslash\{0\}$ определена функция $K(u, v, \rho)$ $\in\left(S_1^2\times R^+\right)$, то $\rho=\rho(u, v)$, задающая поверхность F, в каждой точке которой гауссова кривизна равна значению функции K в этой же точке, является решением отрицательно эллиптичного уравнения типа Монжа – Ампера, которое на S_1^2 имеет следующий вид [1]:

$$\rho_{11}\rho_{22}-\rho_{12}^2-\rho_{11}\frac{\rho_v^2+\rho^2\sin^2 u}{\rho}+2\rho_{12}\cdot 2\frac{\rho_u\rho_v}{\rho}-\rho_{22}\cdot\frac{\rho_u^2+\rho^2}{\rho}=$$
$$=K(u,v,\rho)\cdot\frac{\left(\rho_u^2\sin^2 u+\rho_v^2+\rho^2\sin^2 u\right)^2}{\sin^2 u}-\left(2\rho_u^2\sin^2 u+2\rho_v^2+\rho^2\sin^2 u\right), \quad (5)$$

$\sin u>0$.

Существует не более одной поверхности F: $\rho=\rho(u, v)$ указанного выше класса, гауссова кривизна которой в каждой точке совпадает со значением функции K в этой же точке, если выполняются условия:

$K\in C^1$; $\left[K(\rho)\right]'_\rho\le 0$.

Действительно, уравнение (5) – частный случай уравнения (2). Здесь

$\varphi(\rho)=\rho$, $f(\rho)=\frac{2}{\rho}>0$, $\varphi_1(u,v)=\sin^2 u>0$, $\varphi_2(u,v)=1>0$;

$\varphi'(\rho)-f(\rho)\varphi(\rho)=1-\frac{2}{\rho}\cdot\rho=-1=const$ (не зависит от ρ);

$$\left[\frac{D-\psi D_1}{\varphi^2(\rho)}\right]'_\rho =$$

$$=\left\{\left(2\omega_u^2\rho^2\sin^2 u+2\omega_v^2\rho^2+\rho^2\sin^2 u-K(u,v,\rho)\frac{\left(2\omega_u^2\rho^2\sin^2 u+2\omega_v^2\rho^2+\rho^2\sin^2 u\right)^2}{\sin^2 u}\right)\frac{1}{\rho^2}\right\}'_\rho =$$

$$=\left(-K\rho^2\right)'_\rho\left(\omega_u^2\sin^2 u+\omega_v^2+\sin^2 u\right)^2\frac{1}{\sin^2 u}\geq 0$$

при условии $\left[K\rho^2\right]'_\rho \leq 0$. Здесь $\omega=\int\frac{d\rho}{\rho}$.

Результат следствия совпадает с результатом работы [1], где теорема единственности решения уравнения (5) была доказана геометрическим методом.

Замечание. Можно показать, что из теоремы 2 для обобщенного уравнения (2) вытекает также результат теоремы 1 для уравнения (1). Результатом теоремы 2 можно воспользоваться при решении аналогичной геометрической задачи в эллиптическом пространстве $Э^3$. Условием единственности поверхности является: $\left[K_{ext}tg^2\rho\right]'_\rho \leq 0$.

---

1. Верещагин, Б.М. Восстановление замкнутой выпуклой поверхности по данной функции гауссовой кривизны // Вопросы глобальной геометрии: Сб. научных трудов ЛГПИ им. Л.И. Герцена. – Л., 1979. – С. 7-12.

2. Погорелов, А. В. Внешняя геометрия выпуклых поверхностей. – М.: Наука, 1969. – 760 с.

3. Филимонова, А.П. Оценки в метрике C^2 и единственность выпуклой гомеоморфной сфере поверхности с заданной гауссовой кривизной в H^3 // Вопросы глобальной геометрии: Сб. научных трудов. ЛГПИ им. Л.И. Герцена. – Л., 1979. – С. 64-68.