

УДК 519.853-519.632

В.В.Сельвинский

УРАВНЕНИЯ ГАМИЛЬТОНА В ЗАДАЧЕ О СКОЛЬЖЕНИИ КОНУСА ПО ШЕРОХОВАТОЙ ПЛОСКОСТИ

Рассматривается альтернативный подход к формированию уравнений движения однородного конуса по шероховатой плоскости. Для получения нормальной системы дифференциальных уравнений используется универсальная функция Гамильтона. Силы трения скольжения включаются отдельно в непотенциальные обобщенные силы.

Ключевые слова: уравнения движения, силы трения, функция Гамильтона, нормальная система дифференциальных уравнений.

HAMILTON EQUATIONS IN THE PROBLEM ABOUT SLIDING OF THE CONE ALONG THE ROUGH PLANE

The alternative approach to formation of the equations of the movement of the uniform cone on the rough plane is considered. The function of Hamilton is used for receiving a normal system of the differential equations. Friction forces of sliding join separately in non-potential generalized forces.

Key words: equations of the movement, friction force, Hamilton function, normal system of the differential equations.

При движении механической системы с голономными связями под действием потенциальных и непотенциальных сил уравнения Лагранжа приобретают вид:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j^R \quad (j=1, \dots, s), \quad (1)$$

где $L = L(t, q_j, \dot{q}_j) = T - \Pi$ – функция Лагранжа; $T = T(t, q_j, \dot{q}_j)$ – кинетическая энергия; $\Pi = \Pi(t, q_j)$ – потенциальная энергия, определяемая наличием потенциальных сил; Q_j^R – обобщенные непотенциальные силы; q_j, \dot{q}_j – обобщенные координаты и скорости ($j=1, \dots, s$); s – число степеней свободы; t – время. Уравнения (1) представляют собой систему s дифференциальных уравнений второго порядка.

Для получения эквивалентной системы $2s$ дифференциальных уравнений первого порядка используем функцию Гамильтона:

$$H(t, q_j, p_j) = \sum_{j=1}^s \dot{q}_j p_j - L(t, q_j, \dot{q}_j), \quad (2)$$

в выражении которой $p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$ – обобщенные импульсы, а обобщенные скорости $\dot{q}_j = \dot{q}_j(t, q_j, p_j)$

являются функциями времени, обобщенных координат и импульсов.

Нетрудно получить

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \sum_{j=1}^s \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial p_i} p_j + \dot{q}_i - \sum_{j=1}^s \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial p_i} = \dot{q}_i; \quad (3)$$

из (1) следует

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = \sum_{j=1}^s \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial q_i} p_j - \frac{\partial L}{\partial q_i} - \sum_{j=1}^s \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial q_i} = -\frac{\partial L}{\partial q_i} = -\frac{dp_i}{dt} + Q_i^R. \quad (4)$$

Отсюда уравнения Гамильтона принимают вид:

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} + Q_i^R \quad (i=1, \dots, s). \quad (5)$$

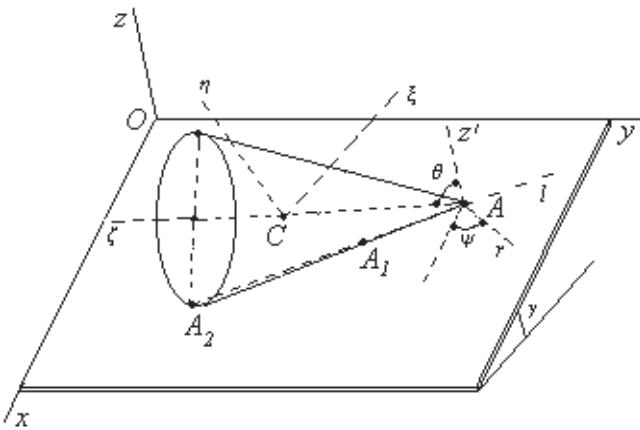


Рис. 1. Схема положения конуса на шероховатой плоскости.

Рассмотрим движение однородного круглого конуса по шероховатой наклонной плоскости, опирающегося на плоскость двумя точками A_1 и A_2 своей образующей (рис. 1). Конус может катиться и одновременно скользить точками контакта, которые, в свою очередь, перемещаются относительно поверхности конуса по дугам окружностей нормальных сечений [1].

Будем считать, что взаимодействие конуса с плоскостью выражается коэффициентом трения скольжения f . Свяжем с плоскостью систему координат $Oxyz$, направив ось Ox по линии наибольшего ската вниз, а ось Oz – перпендикулярно плоскости; с конусом свяжем систему главных

центральных осей $C\xi\eta\zeta$. Будем использовать также прямоугольную систему координат $Arlz'$ с началом в вершине A конуса, ось Al направим по линии A_1A_2 , ось Az' – параллельно Oz . Пусть инерционные свойства конуса характеризуются массой M и моментами инерции J_1, J_2, J_3 относительно осей $C\xi\eta\zeta$ ($J_1 = J_2$); положение конуса определяется координатами центра масс $q_1 = x_C, q_2 = y_C$ и углами Эйлера $q_3 = \varphi, q_4 = \psi$ (φ – угол собственного вращения, ψ – угол прецессии, угол между осью Ar и линией наибольшего ската). Движение конуса считается безотрывным, поэтому $z_C = const, \theta = const$ ($\dot{z}_C = \dot{\theta} = 0$).

Во время движения на конус действуют следующие силы: потенциальная сила тяжести G и непотенциальные – нормальные реакции N_i плоскости и силы трения F_i в точках A_i ($i=1, 2$); проекции сил трения на оси x, y при условии проскальзывания в точках A_i равны:

$$F_{ix} = -fN_i \frac{v_{ix}}{\sqrt{v_{ix}^2 + v_{iy}^2}}, \quad F_{iy} = -fN_i \frac{v_{iy}}{\sqrt{v_{ix}^2 + v_{iy}^2}}, \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} v_{ix} &= \dot{x}_C + (l_i - l_C) \dot{\psi} \cos\psi + l_i \dot{\varphi} \cos\theta \cos\psi, \\ v_{iy} &= \dot{y}_C + (l_i - l_C) \dot{\psi} \sin\psi + l_i \dot{\varphi} \cos\theta \sin\psi \end{aligned} \quad (7)$$

– проекции скоростей точек контакта A_i ; $l_i = AA_i$; $l_C = AC \cdot \sin\theta$. В отсутствии проскальзывания силы трения не превосходят по величине своих максимальных значений, $|F_i| < fN_i$.

Выражение кинетической энергии, отнесенной к подвижным осям $C\xi\eta\zeta$, имеет вид [1]:

$$T = \frac{1}{2}Mv_C^2 + \frac{1}{2}J_1(\omega_\xi^2 + \omega_\eta^2) + \frac{1}{2}J_3\omega_\zeta^2, \quad (8)$$

где v_C – скорость центра масс C ; ω_ξ , ω_η , ω_ζ – проекции вектора угловой скорости, определяемые по формулам:

$$\begin{aligned} \omega_\xi &= \sin\varphi \sin\theta \cdot \dot{\psi} + \cos\varphi \cdot \dot{\theta}, \\ \omega_\eta &= \cos\varphi \sin\theta \cdot \dot{\psi} - \sin\varphi \cdot \dot{\theta}, \\ \omega_\zeta &= \cos\theta \cdot \dot{\psi} + \dot{\phi}. \end{aligned} \quad (9)$$

Потенциальная энергия:

$$\Pi = -Mg\sin\gamma \cdot x_C + Mg\cos\gamma \cdot z_C, \quad (10)$$

где g – ускорение свободного падения.

Функция Лагранжа:

$$L = T - \Pi = \frac{1}{2}Mv_C^2 + \frac{1}{2}J_1(\omega_\xi^2 + \omega_\eta^2) + \frac{1}{2}J_3\omega_\zeta^2 + Mg\sin\gamma \cdot x_C - Mg\cos\gamma \cdot z_C. \quad (11)$$

Обобщенные импульсы:

$$\begin{aligned} p_1 = p_x &= \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_C} = M\dot{x}_C, \quad p_2 = p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_C} = M\dot{y}_C, \\ p_3 = p_\phi &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = J_3(\cos\theta \cdot \dot{\psi} + \dot{\phi}), \quad p_4 = p_\psi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = J_{zz}\dot{\psi} + J_3\cos\theta \cdot \dot{\phi}, \\ p_z &= \frac{\partial L}{\partial \dot{z}_C} = M\dot{z}_C = 0, \quad p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = J_1\dot{\theta} = 0, \end{aligned} \quad (12)$$

где $J_{zz} = J_1\sin^2\theta + J_3\cos^2\theta$.

Из равенств (12) выражаем ненулевые обобщенные скорости:

$$\dot{x}_C = \frac{p_1}{M}, \quad \dot{y}_C = \frac{p_2}{M}, \quad \dot{\phi} = \frac{J_{zz}p_3 - J_3\cos\theta \cdot p_4}{J_1J_3\sin^2\theta}, \quad \dot{\psi} = \frac{p_4 - \cos\theta \cdot p_3}{J_1\sin^2\theta}. \quad (13)$$

Составляем функцию Гамильтона:

$$\begin{aligned} H(t, q_j, p_j) &= \dot{x}_C p_1 + \dot{y}_C p_2 + \dot{\phi} \cdot p_3 + \dot{\psi} \cdot p_4 - \tilde{L}(t, q_j, p_j) = \\ &= \frac{1}{M} p_1^2 + \frac{1}{M} p_2^2 + \frac{1}{J_3} p_3^2 + \frac{1}{J_1\sin^2\theta} (\cos\theta \cdot p_3 - p_4)^2 - \tilde{L}(t, q_j, p_j), \end{aligned} \quad (14)$$

где $\tilde{L}(t, q_j, p_j)$ – функция Лагранжа (11), в которой обобщенные скорости выражены по формулам (13). Формулы (13) образуют также первую группу уравнений Гамильтона. Составим вторую группу уравнений (5). Для этого определим обобщенные непотенциальные силы:

$$\begin{aligned} Q_1^R &= Q_x^R = F_{1x} + F_{2x}, \quad Q_2^R = Q_y^R = F_{1y} + F_{2y}, \quad Q_3^R = Q_\phi^R = F_{1r}l_1\cos\theta + F_{2r}l_2\cos\theta, \\ Q_4^R &= Q_\psi^R = F_{1r}(l_1 - l_C) + F_{2r}(l_2 - l_C), \quad Q_z^R = N_1 + N_2, \\ Q_\theta^R &= (F_{1l} + F_{2l})z_C - N_1(l_1 - l_C) - N_2(l_2 - l_C). \end{aligned}$$

Подставляем все в уравнения (5):

$$\begin{aligned} \frac{dp_1}{dt} &= Mg\sin\gamma + F_{1x} + F_{2x}, \quad \frac{dp_2}{dt} = F_{1y} + F_{2y}, \\ \frac{dp_3}{dt} &= F_{1r}l_1\cos\theta + F_{2r}l_2\cos\theta, \quad \frac{dp_4}{dt} = F_{1r}(l_1 - l_C) + F_{2r}(l_2 - l_C), \end{aligned} \quad (15)$$

а также

$$\begin{aligned} 0 &= -Mg\cos\gamma + N_1 + N_2, \\ 0 &= -\frac{(\cos\theta \cdot p_3 - p_4)(p_3 - \cos\theta \cdot p_4)}{J_1 \sin^3\theta} + (F_{1l} + F_{2l})z_C - N_1(l_1 - l_C) - N_2(l_2 - l_C). \end{aligned} \quad (16)$$

Здесь $F_{ir} = F_{ix}\cos\psi + F_{iy}\sin\psi$, $F_{il} = -F_{ix}\sin\psi + F_{iy}\cos\psi$ ($i=1, 2$) – проекции сил трения на ось Ar , перпендикулярную контактной образующей конуса, и на ось Al , направленную вдоль этой образующей.

Обозначения:

$\mathbf{v}_i^0 = \mathbf{v}_i / |\mathbf{v}_i|$ ($i=1, 2$) – единичные векторы направления скоростей точек контакта A_i ;

$|\mathbf{v}_i| = \sqrt{v_{ix}^2 + v_{iy}^2} = \sqrt{v_{ir}^2 + v_{il}^2}$ – модуль вектора скорости \mathbf{v}_i ; v_{ix}, v_{iy} , определяемый по формулам (7);

$v_{il}^0 = -v_{ix}^0 \sin\psi + v_{iy}^0 \cos\psi$, $v_{ir}^0 = v_{ix}^0 \cos\psi + v_{iy}^0 \sin\psi$ – проекции единичных векторов направления скоростей на оси Al и Ar ;

$$F_{ix} = -fN_i v_{ix}^0, \quad F_{iy} = -fN_i v_{iy}^0, \quad F_{ir} = -fN_i v_{ir}^0, \quad F_{il} = -fN_i v_{il}^0 \quad (i=1, 2) \quad (17)$$

– проекции сил трения на соответствующие оси.

Из уравнений (16) получаем:

$$N_1 + N_2 = Mg\cos\gamma,$$

$$N_1(l_1 - l_C + f z_C v_{1l}^0) + N_2(l_2 - l_C + f z_C v_{2l}^0) = \frac{(p_4 - \cos\theta \cdot p_3)(p_3 - \cos\theta \cdot p_4)}{J_1 \sin^3\theta}, \quad (18)$$

откуда выражаются нормальные реакции N_i ($i=1, 2$).

Уравнения (15) (после подстановки нормальных реакций, сил трения и обобщенных скоростей) вместе с (13) образуют гамильтонову систему 8 дифференциальных уравнений 1-го порядка типа (5). Эта система имеет нормальный вид и может быть проинтегрирована численными методами с использованием математических пакетов MathCAD или MatLab.

В работах [1-3] приводится исследование, а также результаты численного решения эквивалентной системы уравнений движения в обобщенных координатах.

1. Елисеев, А.В. Динамика вибрационных взаимодействий элементов технологических систем с учетом поддерживающих связей / А.В. Елисеев, В.В. Сельвинский, С.В. Елисеев. – Новосибирск: Наука, 2015. – 332 с.

2. Сельвинский, В.В. Динамика контактного взаимодействия твердых тел. – Благовещенск: АмГУ, 2009. – 163 с.

3. Сельвинский, В.В. Особенности скольжения конуса по наклонной шероховатой плоскости // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. – Иркутск: ИрГУПС, 2014. – Вып. 4 (44). – С. 37-43.