

## Информатика и системы управления

УДК 519.7

Н.П. Семичевская, О.И. Сергамасова

### СИНТЕЗ РОБАСТНЫХ АЛГОРИТМОВ УПРАВЛЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫМИ ОБЪЕКТАМИ СО СЛУЧАЙНЫМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ

*Цель работы заключается в изучении нелинейных законов робастного управления нелинейными объектами со случайным воздействием.*

*Задача исследования. Поставленная цель достигается путем синтеза нелинейных робастных алгоритмов управления на основе критерия гиперустойчивости В.М. Попова для систем с явно-неявной эталонной моделью.*

*Ключевые слова: нелинейный робастный алгоритм управления, случайное воздействие.*

### SYNTHESIS OF ROBUST ALGORITHMSTO CONTROL NONLINEAR OBJECTS WITH RANDOM EFFECTS

*The purpose of the work is to study the laws of nonlinear robust control of nonlinear objects with random effects. The research task. The goal is achieved by synthesis of nonlinear robust control algorithms based on the hyperstability criterion of V.M. Popov for systems with explicit-implicit reference model.*

*Key words: nonlinear robust control algorithm, random effect.*

Нередко характер воздействия на системы автоматического регулирования бывает таким, что его нельзя считать определенной функцией времени. Оно может принимать с течением времени самые разнообразные случайные значения. В таких случаях можно оценить только вероятность появления той или иной формы воздействия в тот или иной момент времени [2]. Это происходит не потому, что оно неизвестно заранее, а потому, что сама природа реального задающего или возмущающего воздействия такова, что величина его в каждый момент времени и процесс его изменения с течением времени зависят от множества разнообразных величин, которые случайным образом могут комбинироваться друг с другом, появляться одновременно или с любым сдвигом во времени. Интерес представляют системы робастного управления нелинейными и нестационарными объектами с возмущением случайной природы. Процедура синтеза нелинейных робастных алгоритмов остается прежней [4], построенной на основе критерия гиперустойчивости В.М. Попова.

Рассмотрим нестационарный объект управления, динамические процессы которого описываются уравнениями (1) с относительной степенью передаточной функции  $n - m = 1$ .

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + B(t)u(t) + f_n(t), \quad y(t) = L^T x(t), \quad z = g^T y(t), \quad (1)$$

где  $x(t) \in R^n$  – вектор переменных состояния;  $y(t) \in R^m$  – вектор выхода объекта;  $z(t) \in R$  – обобщенный выход объекта, формируемый с помощью линейного компенсатора  $g \in R^m$ ;  $u(t)$  – управление;  $A(t)$  – нестационарная квадратная матрица состояния размерности  $n \times n$ ;  $B(t)$  – нестационарный

вектор размерности  $n \times 1$ ;  $L$  – матрица выхода размерности  $n \times m$ ;  $f_n(t) \in R^n$  – случайная вектор-функция внешних возмущений или помех, относительная степень объекта  $(n - m) = 1$ .

На объект (1) оказывается случайное воздействие в виде гауссовского процесса. Его многомерная функция распределения, для совокупности значений  $\xi_k = \xi(t_k)$  определяется выражением

$$\omega(x_1, x_2, x_3, t_1, t_2, t_3) = \frac{1}{\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sqrt{(2\pi)^3 D}} \exp \left\{ -\frac{1}{2D} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 D_{ij} \frac{(x_i - \alpha_i)}{\sigma_i} \frac{(x_j - \alpha_j)}{\sigma_j} \right\},$$

где  $\alpha_i = \xi(t_i)$  и  $\sigma_i^2 = \left[ \overline{\xi(t_i) - \alpha_i} \right]^2$  – среднее значение и дисперсия процесса в момент времени  $t_i$ ;

$D = \begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{vmatrix}$  – определитель  $n$ -го порядка корреляционной матрицы;  $D_{ij}$  – алгебраическое до-

полнение элемента  $R_{ij}$ ;  $R_{ij} = R(t_i, t_j) = \frac{B(t_i, t_j) - \alpha_i \alpha_j}{\sigma_i \sigma_j}$  – коэффициент корреляции случайных величин

$\xi(t_i)$  и  $\xi(t_j)$ ;  $R_{ii} = 1$ ;  $R_{ij} = R_{ji}$ .

Желаемое поведение объекта управления (1) задается с помощью явно-неявной эталонной модели:

$$\frac{dz_M(t)}{dt} = a_0 z_M(t) + b_0 r(t), \quad z_M = g^T y_M, \quad (2)$$

где  $y_M(t) \in R^m$  – вектор выхода эталонной модели (ЭМ);  $z_M(t) \in R$  – обобщенный выход ЭМ;  $g \in R^m$  – линейный компенсатор;  $r(t) \in R$  – скалярное задающее воздействие;  $A_M$  – стационарная квадратная матрица состояния размерности  $n \times n$ , причем  $A_M$  является гурвицевой;  $B_M$  – стационарный вектор размерности  $n \times 1$ .

Будем считать, что выполнены условия структурного согласования между объектом (1) и эталоном вида (2):

$$A(t) = A_M + B_M \beta^T(t) L^T, \quad B(t) = B_M (1 + \alpha(t)), \quad (3)$$

где  $\beta(t) \in R^n$  – нестационарный вектор, ограниченный по норме;  $\alpha(t) \in R^1$  – скалярная функция времени.

Требуется построить робастную систему управления с явно-неявной эталонной моделью (2) таким образом, чтобы при любом наборе  $\xi \in \Xi$ , при любых начальных условиях  $x(0)$  и ограниченных возмущениях выполнялось целевое условие:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \|x_M(t) - x(t)\| &\leq \delta_x^2, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} |y_M(t) - y(t)| &\leq \delta_y^2, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $\delta_x^2, \delta_y^2 = const$  – некоторые относительные малые числа.

Эквивалентное математическое описание системы управления с явно-неявной эталонной моделью (2) имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{de(t)}{dt} &= A_M e(t) + B_M \mu(t), \\ v(t) &= g^T L^T e(t), \\ \mu(t) &= r(t) - \beta^T(t) L^T x(t) - (1 + \alpha(t)) u(t) - \tilde{f}(t), \end{aligned} \quad (5)$$

где  $e(t) \in R^n$  – ошибка рассогласования;  $v(t) \in R^1$  – обобщенный выход эквивалентной системы;  $g \in R^m$  – вектор, элементы которого подлежат выбору.

Матрица  $A_M$  является гурвицевой, т.е. ее собственные значения удовлетворяют соотношению:

$$\det(sE_n - A_M) = (s - a_0)g^T L^T (sE_n - A_M)^+ B_M. \quad (6)$$

В таком случае передаточную функцию  $W(s)$  можно преобразовать с учетом соотношения (6) к виду:

$$W_M(s) = g^T L^T (sE_n - A_M)^{-1} B_M = \frac{g^T L^T (sE_n - A_M)^+ B_M}{\det(sE_n - A_M)} = \frac{b_0(s + a_0)^m}{(s + a_0)^n} = \frac{b_0}{s + a_0}.$$

Тогда необходимо и достаточно вектор  $g$  выбрать таким образом, чтобы полином  $g^T L^T (sE_n - A_M)^+ B_M$  был гурвицевым степени  $(n-1)$  с положительными коэффициентами, что гарантировало бы выполнение условия  $\operatorname{Re}W(j\omega) > 0, \forall \omega \in (-\infty; \infty)$ .

Рассмотрим модификацию интегрального неравенства В.М. Попова (МИНП) и получим интегральные оценки для каждого интегрального слагаемого вида

$$\eta(0, t) = \sum_i \eta_i^*(0, t) = -\sum_i \int_0^t \mu_i(s) v(s) Q_i(s) ds \geq \gamma_0^2, \quad (7)$$

где  $Q_i(t, v(t))$  – положительно определенные функции;  $\eta_i^*(0, t), i = 1, 2, 3, 4$  – модифицированные интегральные слагаемые вида:

$$\eta_1^*(0, t) = -\int_0^t r(s) v(s) |v(s)|^2 ds, \quad (8)$$

$$\eta_2^*(0, t) = \int_0^t \beta^T(s) y(s) v(s) |v(s)|^2 ds, \quad (9)$$

$$\eta_3^*(0, t) = \int_0^t (1 + \alpha(s)) u(s) v(s) ds, \quad (10)$$

$$\eta_4^*(0, t) = \int_0^t R(s) v(s) |v(s)|^2 ds, \quad (11)$$

где  $Q = Q_2 = Q_4 = |v(s)|^2, Q_3 = 1, R(s) = \sigma^2 e^{-\alpha s}$  – корреляционная функция гауссовского случайного процесса;  $\sigma^2$  – дисперсия процесса;  $\alpha > 0$  определяет корреляцию (статистическую зависимость) соседних чисел.

Для моделирования гауссовского случайного процесса с экспоненциальной функцией корреляции используется следующий алгоритм:

$$x(n) = k_1 e(n) + k_2 x(n-1), k_1 = \sqrt{\sigma^2(1 - k_2^2)}, k_2 = e^{-\alpha},$$

где  $e(n)$  – значения дискретного белого гауссовского шума с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией. Параметрами модели в данном случае являются дисперсия выходного моделируемого процесса  $\sigma^2$  и параметр  $\alpha$ , который определяет статистическую связь соседних случайных отсчетов.

Как правило, на практике исходным параметром является нормированный коэффициент корреляции

$$\rho(1) = \frac{R(1)}{\sigma^2} = e^{-\alpha},$$

который определяет нормированную корреляцию соседних отсчетов случайного процесса и практически задается из интервала от 0.9 до 0.9999. Когда этот коэффициент равен 1, то все значения случайного процесса становятся одинаковыми, а когда этот коэффициент стремится к 0, то получается рассмотренная ранее модель – дискретный белый гауссовский шум.

Оценки для интегралов (8), (9) и (11) имеют вид:

$$\begin{aligned} \eta_1^*(0, t) &= \eta_1^*(0, t) \pm \gamma_1 \int_0^t \left( -|r(s)|(1 + \alpha(s))|v(s)|^2 \right) ds \geq \\ &\geq \gamma_1 \int_0^t \left( |r(s)|(1 + \alpha(s))|v(s)|^2 \right) ds, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \eta_2^*(0, t) &= \eta_2^*(0, t) \pm \gamma_2 \int_0^t \left( (1 + \alpha(s)) \|y(s)\|_2 |v(s)|^2 \right) ds \geq \\ &\geq -\gamma_2 \int_0^t \left( (1 + \alpha(s)) \|y(s)\|_2 |v(s)|^2 \right) ds, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \eta_4^*(0, t) &= \eta_4^*(0, t) \pm \gamma_3 \int_0^t \left( f_{const} (1 + \alpha(s)) |v(s)|^2 \right) ds \geq \\ &\geq -\gamma_3 \int_0^t \left( f_{const} (1 + \alpha(s)) |v(s)|^2 \right) ds, \end{aligned} \quad (14)$$

где введены следующие постоянные коэффициенты  $\gamma_1 = \text{const}$   $t$ ;  $\gamma_3 = \text{const}$   $t$ ;  $\gamma_2 = \text{const} \geq \gamma \sup \|\beta^T(t)\|^2$ .

$f_{const}$  – оценка спектральной плотности  $S_f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau$  случайной функции  $f(t)$ .

Данная формула называется формулой Винера-Хинчина. В действительной форме она имеет вид:

$$S_f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} R(\tau) \cos(\omega\tau) d\tau.$$

Запишем интегральное неравенство, используя полученные оценки:

$$\begin{aligned} \eta(0, t) &= \sum_i \eta_i^*(0, t) \geq \gamma_1 \int_0^t \left( |r(s)|(1 + \alpha(s))|v(s)|^2 \right) ds + \gamma_2 \int_0^t \left( (1 + \alpha(s)) \|y(s)\|_2 |v(s)|^2 \right) ds - \\ &- \int_0^t (1 + \alpha(s)) u(s) v(s) ds + \gamma_3 \int_0^t \left( f_{const} (1 + \alpha(s)) |v(s)|^2 \right) ds = \\ &= \int_0^t \left[ \gamma_1 |r(s)| |v(s)| + \gamma_2 \|y(s)\|_2 |v(s)| - u(s) \text{sgn}(v(s)) + \gamma_3 f_{const} |v(s)| \right] (1 + \alpha(s)) |v(s)| ds. \end{aligned}$$

Явный вид закона управления описывается следующими формулами

$$u(t) = (\gamma_1 |r(t)| + \gamma_2 \|y(t)\| + \gamma_3 f_{const}) v(t). \quad (15)$$

Выполнение условия МИНП и условия строгой положительной определенности для эквивалентной системы управления (5), согласно критерию гиперустойчивости, означает гиперустойчивость как системы (5), так и исходной системы (1), (2), (3), (15). Следовательно, имеет место и выполнение целевого условия (4).

Структурная схема робастной системы управления (1), (2), (3), (15) представлена на рис. 1.

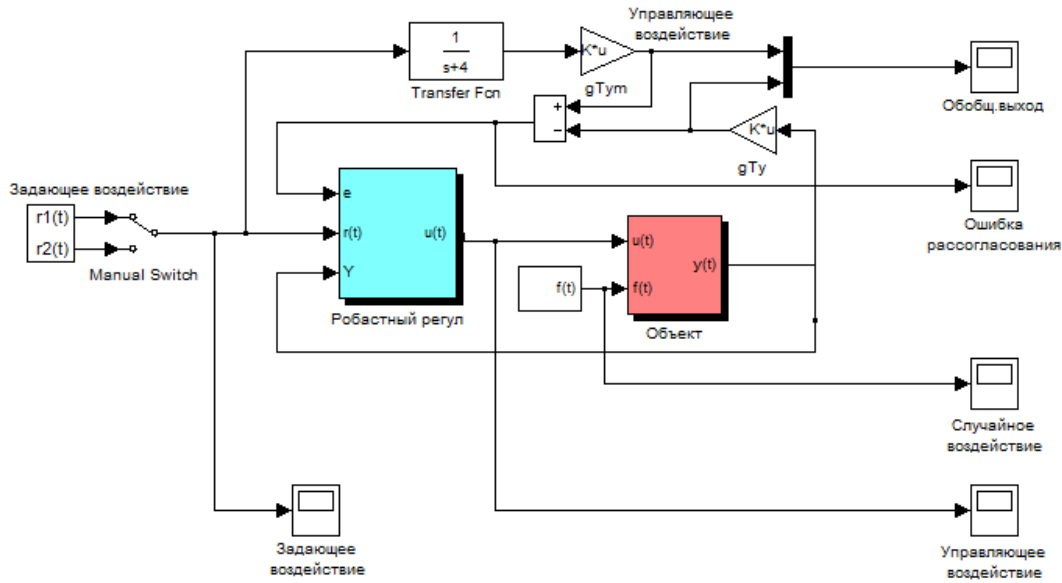


Рис. 1. Структурная схема робастной системы управления нестационарным объектом с действием случайной помехи ЯНЭМ.

Проведем имитационное моделирование системы нелинейного робастного управления нестационарным объектом с действием случайной помехи с явно-неявной эталонной моделью. Рассмотрим систему, описываемую уравнениями (1), (3), (15), в которой параметры объекта управления и эталонной модели (2) в векторно-матричной форме имеют значения

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a_1(t) & a_2(t) & a_3(t) \end{pmatrix}, B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ b_3(t) \end{pmatrix}, f(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f_3(t) \end{pmatrix}, L^T = E_3.$$

Коэффициенты объекта изменялись по законам:

$$\begin{aligned} a_1(t) &= -1 + |2 \sin(2.4t)|, \\ a_2(t) &= -7 + |\sin(5.6t)|, \\ a_3(t) &= 2 + |1.5 \sin(7.8t)|, \\ b_3(t) &= 3 + 0.3 \sin(4.5t). \end{aligned}$$

Определим спектральную плотность  $S_f(\omega)$  гауссовского случайного процесса по формуле

$$\begin{aligned} S_f(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau. \\ S_f(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma^2 e^{-\alpha\tau - i\omega\tau} d\tau = \frac{\sigma^2}{2\pi} \left\{ \int_{-\infty}^0 e^{(\alpha - i\omega)\tau} d\tau + \int_0^{\infty} e^{-(\alpha + i\omega)\tau} d\tau \right\} = \\ &= \frac{\sigma^2}{2\pi} \left\{ \frac{1}{\alpha - i\omega} + \frac{1}{\alpha + i\omega} \right\} = \frac{\sigma^2 \alpha}{\pi} \frac{1}{\alpha^2 + \omega^2}, \end{aligned}$$

т.е. в этом случае  $S_f(\omega) = \frac{A}{\alpha^2 + \omega^2}$ ,  $A = \frac{\sigma^2 \alpha}{\pi}$ ,  $\sigma > 0, \alpha > 0$ .

$$f_{const} > 2.9.$$

Эталонная модель была задана в виде:

$$A_M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -24 & -26 & -9 \end{pmatrix}, B_M = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Синтез системы с явно-неявной эталонной моделью связан с выбором компонент вектора  $g$  для обеспечения условия положительности ЛСЧ вида:

$$W_M(s) = \frac{g^T L^T (sE_3 - A_M)^+ B_M}{\det(sE_3 - A_M)} = \frac{g_3 s^2 + g_2 s + g_1}{s^3 + 9s^2 + 26s + 24} = \frac{g_3 s^2 + g_2 s + g_1}{(s+2)(s+3)(s+4)},$$

согласно которой были получены компоненты вектора  $g^T = (5 \ 6 \ 1)$ .

Нестационарные параметров объекта управления заданы в виде:

$$\beta^T(t) = (23 + 2\sin(2.4t) \quad 19 + 0.5\sin(5.6t) \quad 11 + 1.5\sin(7.8t)),$$

$$\alpha(t) = 2 + 0.3\sin(4.5t), \quad \sup_{t \rightarrow \infty} \|\beta^T(t)\| \leq 39.13, \quad \alpha(t) \leq 2.5.$$

Задающие воздействия были сформированы следующим образом:

$$r_1(t) = r_0 \operatorname{sign}\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)\right), \quad r_0 = 1.$$

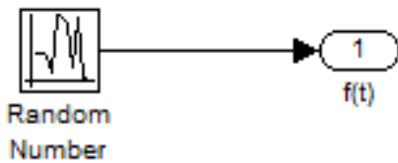


Рис. 2. Реализация случайного воздействия с помощью блока RandomNumber.

как:

$$\gamma_1 = \gamma_2 = 100, \quad \gamma_3 = 5.$$

Параметры робастного регулятора (16) были заданы

Имитационное моделирование осуществляется при помощи входящего в состав математического пакета MATLAB средства визуального моделирования SIMULINK.

Случайное воздействие реализовано с помощью блока RandomNumber (рис. 2).

Структурная схема нестационарного объекта представлена на рис. 3.

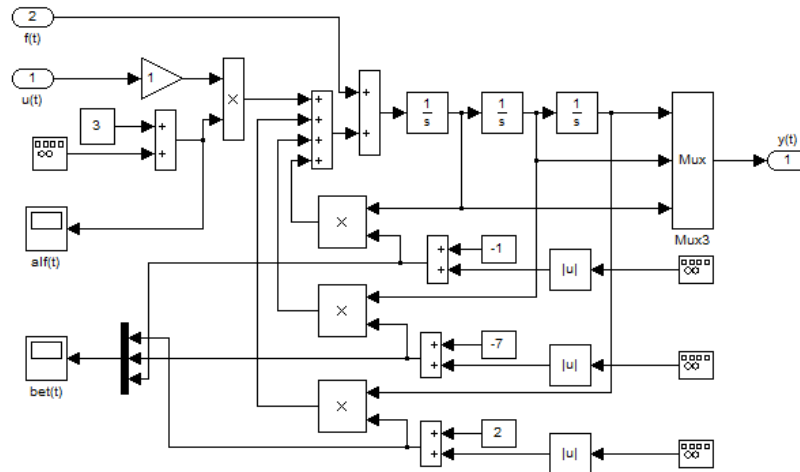


Рис. 3. Реализация нестационарного объекта.

Структурная схема робастного регулятора представлена на рис. 4.

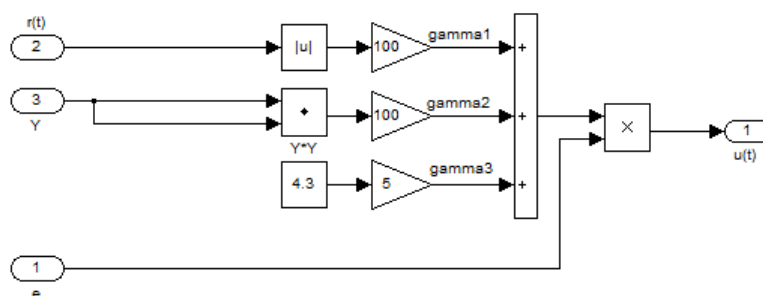


Рис. 4. Реализация робастного регулятора.

Разработанная система представляет собой пакет программ, состоящий из следующих m-файлов.

Файл `interfeis.m` – файл запуска системы. Он запускает программу и предлагает пользователю осуществить выбор необходимого случайного воздействия (рис. 5).

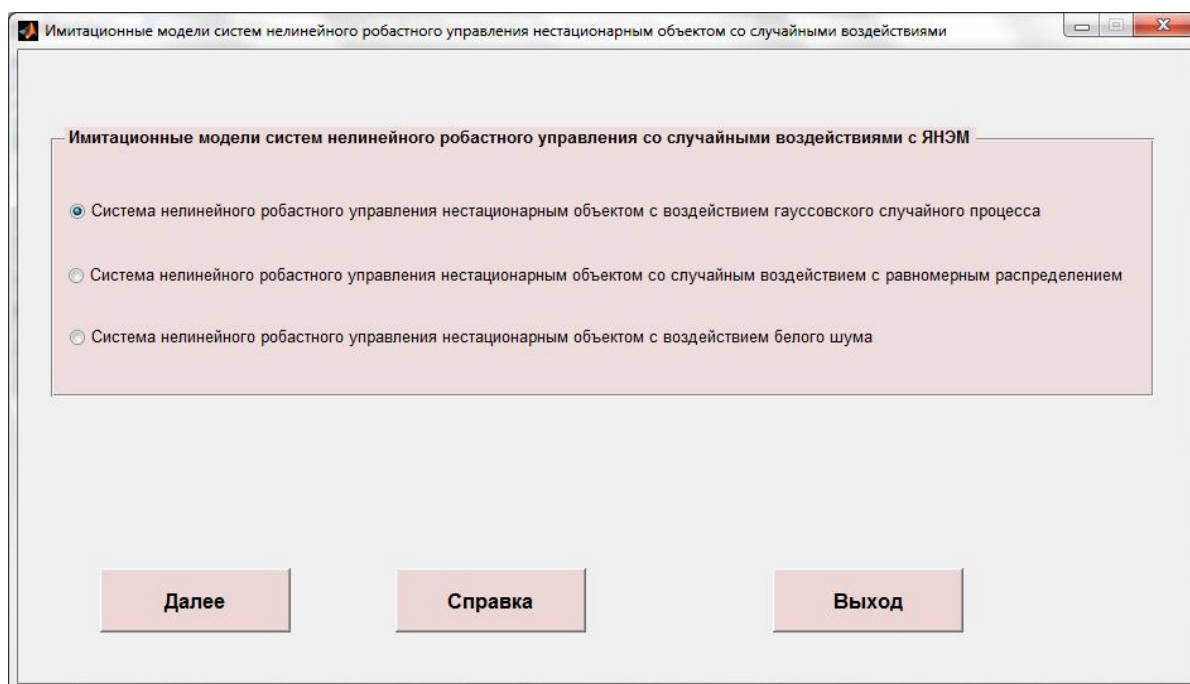


Рис. 5. Главное окно программы.

Для каждой из моделируемых систем внешний вид окна будет отличаться лишь заголовком окна и набором параметров модели. Внешний вид окна управления моделированием показан на рис. 6.

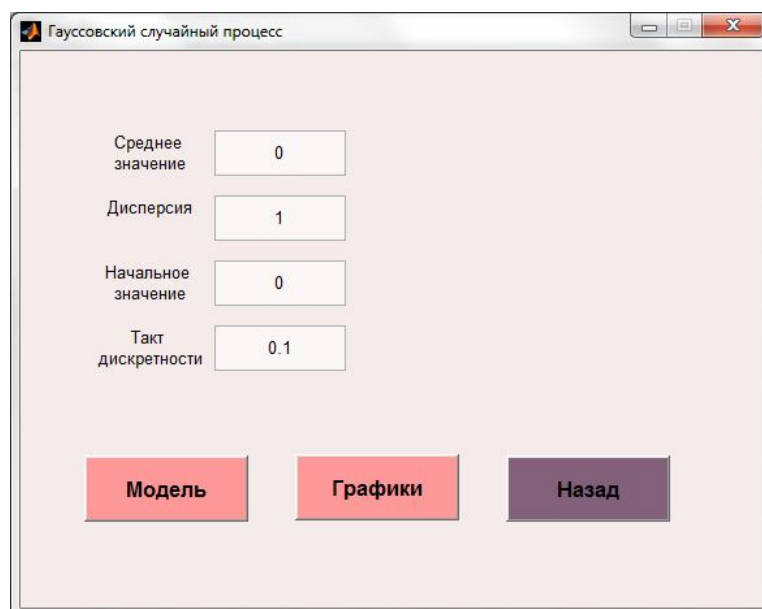


Рис. 6. Окно управления моделированием.

Файл `help.m` – запускает окно, содержащее всю справочную информацию, доступную пользователю.

Результаты проведенного имитационного моделирования представлены на рис. 7, 8, 9.

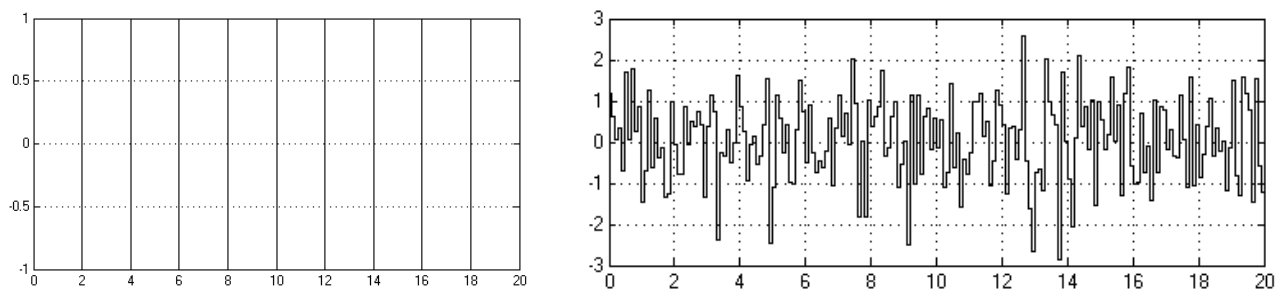


Рис. 7. Задающее и случайное воздействия.

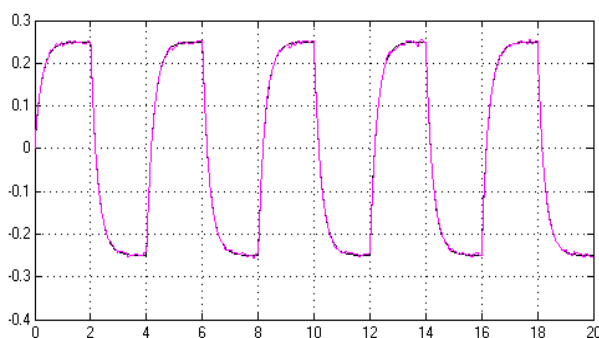


Рис. 8. Выходы объекта и эталона для системы.

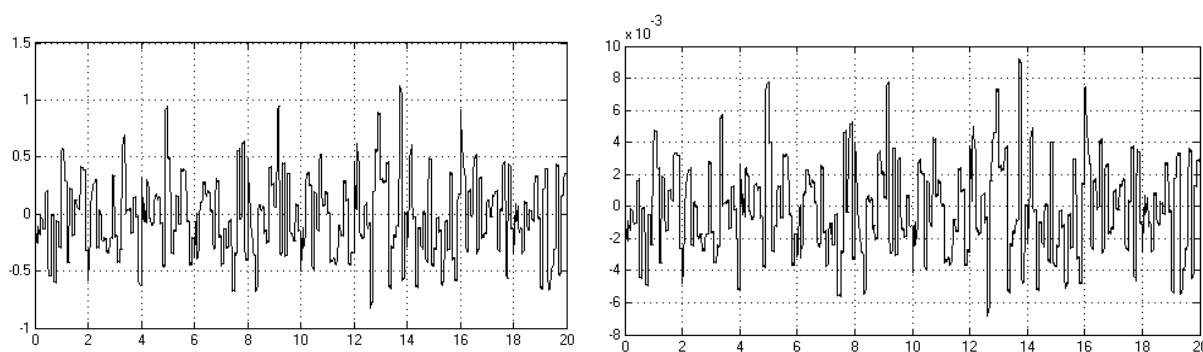


Рис. 9. Управление и ошибка рассогласования для системы.

1. Борисевич, А.В. Теория автоматического управления: элементарное введение с применением MATLAB. – СПб.: Политехнический ун-т, 2011. – 200 с.
2. Бесекерский, В.А. Теория систем автоматического управления / В.А. Бесекерский, Е.П. Попов. –Изд. 4-е, перераб. и доп. – СПб.: Профессия, 2003. – 752 с.
3. Гмурман, В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика: Учеб. пособие. –Изд. 9-е, перераб. и доп. – М.: Высшая школа, 2003. – 479 с.
4. Еремин, Е.Л. Нелинейное робастное управление сложными динамическими объектами / Е.Л. Еремин, Н.В. Кван, Н.П.Семичевская, Д.А. Теличенко. – Благовещенск: Амурский гос. ун-т, 2011. – 204 с.