

УДК 514.742.43

И.П. Попов

ПРИЛОЖЕНИЕ МНИМЫХ ВЕКТОРОВ К МОДЕЛИРОВАНИЮ
АБСТРАКТНОГО СИЛОВОГО ПОЛЯ
ЧАСТЬ 1

Показано, что классическая модель магнитного поля допускает нарушение третьего закона Ньютона, исключает взаимодействие соосных элементов проводников с токами, не предусматривает существования моментов сил, действующих на элементы проводников, законом Ампера принято считать формулу, в общем случае не совместимую с его основным результатом. С привлечением таких математических объектов как псевдовекторы, комбинированные и сопряженные векторы построена формальная модель аналога электромагнитного поля, не имеющая указанных особенностей, – в частности, формальные аналоги закона электромагнитной индукции являются простым следствием других свойств и соотношений поля, при этом построенная модель удовлетворяет основному требованию Ампера – безусловному выполнению третьего закона Ньютона.

Ключевые слова: псевдовектор, магнитное поле, третий закон Ньютона, соосные элементы проводников, моменты сил, напряженность, индукция, дивергенция.

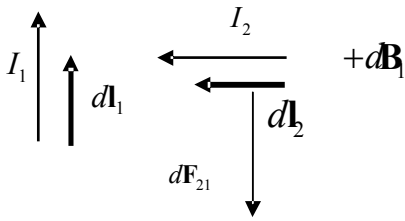
ANNEX IMAGINARY VECTOR TO MODELING ABSTRACT FORCE FIELD
PART 1

It is shown that the classical model of the magnetic field allows the violation of Newton's third law, eliminates interference of conductors coaxial elements with currents, does not provide the existence of forces moments acting on conductors elements. Ampere's law is considered to be a formula which in general case is incompatible with its main result. A formal model of the electromagnetic field analog was constructed with the use of such mathematical entities as pseudovectors, combined and associated vectors. This model does not have the above mentioned features. In particular, the formal analogy of electromagnetic induction law is a simple consequence of other properties and relations of fields. Thus, the developed model meets the essential requirements of Ampere that is the unconditional implementation of Newton's third law.

Key words: pseudovector, magnetic field, Newton's third law, conductors coaxial elements, the moments of forces, tension, induction, divergence.

Введение

В существующей модели магнитного поля силы взаимодействия между замкнутыми контурами с токами удовлетворяют третьему закону Ньютона (ТЗН).



Однако эти силы являются результатом сложения элементарных сил, действующих между малыми элементами проводников с токами, для которых ТЗН может нарушаться [1]. На рис. 1 представлен предельный случай такого нарушения.

Рис. 1. Нарушение ТЗН. Первый элемент проводника dl_1 с током I_1 действует на второй с силой

$$dF_{21} = I_2 [dl_2, dB_1] = \frac{\mu_0 \mu I_1 I_2}{4\pi r^3} [dl_2, [dl_1, \mathbf{r}]], \quad (1)$$

где dB_1 – магнитная индукция; $\mu_0 \mu$ – магнитная проницаемость; \mathbf{r} – радиус-вектор.

Эта сила имеет максимальное значение, поскольку все перемножаемые векторы взаимно перпендикулярны. В то же время второй элемент действует на первый с силой

$$dF_{12} = I_1 [dl_1, dB_2] = \frac{\mu_0 \mu I_1 I_2}{4\pi r^3} [dl_1, [dl_2, \mathbf{r}]] = 0,$$

так как dl_2 и \mathbf{r} коаксиальны.

Модель магнитного поля имеет ряд других противоречий, которые будут показаны ниже.

Целью настоящей работы является не исправление существующей теории электромагнитного поля, а построение в R^3 модели формального аналога электромагнитного поля, с одной стороны, максимально похожей на электромагнитное поле, с другой, – не вступающей в противоречие с ТЗН – одним из основных законов механики и свободной от других противоречий модели электромагнитного поля. На невозможность нарушения ТЗН при взаимодействии проводников с токами указывал Ампер [2, 3]. Попытки построения непротиворечивых моделей предпринимались в ряде работ [1], которые представляются излишне феноменологическими. Далее величины формального аналога электромагнитного поля для отличия их от соответствующих величин электромагнитного поля обозначаются другим шрифтом: $q, I, B, H, D, E, F \rightarrow q, l, B, H, D, E, F$.

В качестве одной из предпосылок дальнейшего рассмотрения может быть использована измененная конфигурация приведенного выше примера, в которой второй проводник расположен параллельно первому, при этом они перпендикулярны соединяющему их радиус-вектору так, что силы взаимодействия лежат на одной прямой. ТЗН в этом случае не нарушается. При этом

$$dF = -\frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{I_1 dl_1 I_2 dl_2}{r^2} \quad (2)$$

1. Первый признак формального аналога электромагнитного поля, совпадающий с соответствующим признаком магнитного поля

Этот признак состоит в том, что если элементы формальных аналогов токов $l_1 dl_1$ и $l_2 dl_2$ лежат в одной плоскости S и перпендикулярны соединяющему их радиус-вектору \mathbf{r} , то, как и в (2), они взаимодействуют с силой

$$dF_{12} = -dF_{21} = -m \frac{l_1 dl_1 \cdot l_2 dl_2}{4\pi r^2} \frac{\mathbf{r}_{12}}{r}, \quad dF = -m \frac{(l_1 dl_1)_n^S (l_2 dl_2)_n^S}{4\pi r^2}.$$

Здесь m – формальный аналог магнитной проницаемости.

Если S_1 и S_2 – плоскости, образованные соответственно парами векторов $l_1 dl_1, \mathbf{r}$ и $l_2 dl_2, \mathbf{r}$, α – угол между S_1 и S_2 , то

$$dF = -m \frac{(l_1 dl_1)_n^{S_1} (l_2 dl_2)_n^{S_2}}{4\pi r^2} \cos \alpha. \quad (3)$$

2. Второе противоречие модели магнитного поля

Несмотря на то, что Ампер считал, что силы взаимодействия соосных токов существуют (этот вывод он сделал в том числе и на основании собственных многочисленных экспериментов [2]), в классической модели магнитного поля соосные проводники с токами не взаимодействуют.

Из того обстоятельства, что сила взаимодействия элементов проводников с токами является градиентом энергии магнитного поля, созданного этими элементами, следует, что между элементами со стабилизированными токами существует сила взаимодействия, если при изменении расстояния между ними энергия результирующего поля, созданного элементами, изменяется [4–6]. Впредь для того, чтобы не усложнять рассуждения учетом влияния электромагнитной индукции, будем иметь в виду, что рассматриваемые токи являются стабилизированными.

Если соосные проводники с токами не взаимодействуют, то для них должно выполняться тождество

$$\int_{\infty}^0 F dr = A = W_0 - W_{\infty} \equiv 0,$$

где A – работа; W – энергия суммарного поля обоих проводников. Это легко проверить.

При условии $d\mathbf{l}_1 = d\mathbf{l}_2 = d\mathbf{l}$, $I_1 = -I_2$ и $r = \infty$

$$W_{\infty} = 2\mu_0\mu \int_V \frac{H^2}{2} dV \neq 0,$$

где H – напряженность поля одного проводника.

При $r = 0$ $W_0 = 0$ и $W_0 - W_{\infty} \neq 0$. Это означает, что коллинеарные проводники с токами взаимодействуют с силой

$$F = \frac{dW}{dr}. \quad (4)$$

В этой связи возникает необходимость выяснить, в какой мере эксперименты, выполненные Био и Саваром, исключают возможность существования такой силы.

Эти эксперименты, по существу, не являлись опытами по определению напряженности магнитного поля, они и не были экспериментами по определению взаимодействия линейных проводников с током, а задумывались и осуществлялись для определения силы взаимодействия проводников и постоянного магнита. Не случайно в формулу входила «магнитная масса» m ($F = mI d \sin \varphi / r^2$ [7]). И поскольку действие магнита определяется действием круговых токов, которые можно условно заменить одним эквивалентным круговым током, то эксперименты, по существу, показывали, как отрезок линейного проводника взаимодействует с круговым током.

Пусть магнит располагается на оси линейного проводника (но не самом проводнике) так, чтобы ось совпадала с плоскостью кругового тока магнита. Круговой ток можно представить в виде двух токов, направленных в противоположные стороны и соосных линейному проводнику. Один из этих токов в соответствии с (4) притягивается к линейному проводнику, а другой с такой же по величине силой отталкивается от него, и суммарное осевое усилие равно нулю. По этой причине эксперименты Био и Савара не могли выявить силу взаимодействия соосных проводников и, следовательно, не дают никаких оснований ее «запретить».

Таким образом, вторым противоречием классической модели магнитного поля является противоречие с методом определения силы как градиента энергии, т.е. отсутствие учета силового взаимодействия между соосными составляющими элементов проводников с токами.

Модель квазиэлектромагнитного поля свободна от указанного противоречия.

Замечание. Нетрудно убедиться, что ТЗН нарушается тогда, когда векторы $d\mathbf{l}$ имеют продольные составляющие, коаксиальные радиус-вектору. Из этого следует вывод: если исходить из то-

го, что ТЗН нарушаться не может в силу своей всеобщности (по крайней мере, в условиях магнито-статике), значит, при классическом расчете из-за двойного векторного произведения (1) теряются силы взаимодействия продольных проводников или их составляющих. На существование этих сил указывал Ампер и их наличие обосновано выше.

Поскольку расчет сил методом двойного векторного произведения корректен лишь в случае, когда перемножаемые векторы ортогональны, следует прибегать к более универсальному методу определения сил как градиента энергии (4).

3. Второй признак формального аналога электромагнитного поля, не совпадающий с соответствующим противоречивым признаком магнитного поля

Этот признак заключается в том, что соосные элементы формальных аналогов токов $I_1 d\mathbf{l}_1$ и $I_2 d\mathbf{l}_2$ взаимодействуют с силой

$$d\mathbf{F}_{12} = -d\mathbf{F}_{21} = -k_\tau m \frac{I_1 d\mathbf{l}_1 \cdot I_2 d\mathbf{l}_2}{4\pi r^2} \frac{\mathbf{r}_{12}}{r},$$

$$dF = -k_\tau m \frac{(I_1 dl_1)_\tau (I_2 dl_2)_\tau}{4\pi r^2},$$
(5)

где k_τ – некоторый безразмерный коэффициент, величина которого будет установлена ниже. В классической модели магнитного взаимодействия эта сила считается равной нулю.

4. Общий случай взаимного расположения элементов формальных аналогов токов

В общем случае взаимодействующие элементы формальных аналогов токов $I_1 d\mathbf{l}_1$ и $I_2 d\mathbf{l}_2$ расположены под углом γ относительно друг друга и составляют с соединяющим их радиус-вектором \mathbf{r} углы φ_1 и φ_2 .

В соответствии с теоремой косинусов для сторон сферического треугольника [8] можно показать:

$$\cos \gamma = \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \cos \alpha + \cos \varphi_1 \cos \varphi_2.$$
(6)

Векторы $I_1 d\mathbf{l}_1$ и $I_2 d\mathbf{l}_2$ можно разложить на поперечные $(I_1 dl_1)_n^{S1}$, $(I_2 dl_2)_n^{S2}$ и продольные $(I_1 dl_1)_\tau$, $(I_2 dl_2)_\tau$ составляющие относительно радиус-вектора. В соответствии с (3), (5) и (6) суммарная сила взаимодействия элементов формальных аналогов токов $I_1 d\mathbf{l}_1$ и $I_2 d\mathbf{l}_2$ равна

$$dF = -m \frac{(I_1 dl_1)_n^{S1} (I_2 dl_2)_n^{S2}}{4\pi r^2} \cos \alpha - k_\tau m \frac{(I_1 dl_1)_\tau (I_2 dl_2)_\tau}{4\pi r^2} =$$

$$= -m \frac{(I_1 dl_1 \sin \varphi_1) (I_2 dl_2 \sin \varphi_2)}{4\pi r^2} \cos \alpha - k_\tau m \frac{(I_1 dl_1 \cos \varphi_1) (I_2 dl_2 \cos \varphi_2)}{4\pi r^2} =$$

$$= -m \frac{I_1 dl_1 I_2 dl_2}{4\pi r^2} (\sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \cos \alpha + k_\tau \cos \varphi_1 \cos \varphi_2) =$$

$$= -m \frac{I_1 dl_1 I_2 dl_2}{4\pi r^2} [\cos \gamma + (k_\tau - 1) \cos \varphi_1 \cos \varphi_2].$$
(7)

$d\mathbf{F}$ направлена вдоль \mathbf{r} .

Выражение (7) совпадает с основной формулой Ампера применительно к магнитному взаимодействию [2]. По-видимому, недоразумение – считать законом Ампера выражение (1), которое в общем случае несовместимо с его основным результатом.

При этом Ампер полагал $k_\tau = -0,5$. Однако эта величина нуждается в уточнении. Для ее определения потребуется прояснить ситуацию с моментами.

5. Моменты сил в классическом магнитном поле и заимствование результатов для формального аналога электромагнитного поля

Если в системе из n контуров с токами какой-то контур под действием поля повернется на угол $d\varphi$, то энергия магнитного поля изменится на величину dW_M и совершится механическая работа $Md\varphi$, где M – момент, действующий по направлению $d\varphi$ [9]. Для k -го контура уравнение по второму закону Кирхгофа:

$$i_k R_k + d\Psi_k / dt = e_k.$$

При умножении уравнения на $i_k dt$ получается

$$i_k^2 R_k dt + i_k d\Psi_k = e_k i_k dt.$$

Для всей совокупности контуров

$$\sum_{k=1}^n i_k^2 R_k dt + \sum_{k=1}^n i_k d\Psi_k = \sum_{k=1}^n e_k i_k dt,$$

или

$$\sum_{k=1}^n i_k d\Psi_k = \sum_{k=1}^n e_k i_k dt - \sum_{k=1}^n i_k^2 R_k dt.$$

Это энергия, полученная от источников электродвижущей силы, за вычетом тепла. В соответствии с законом сохранения энергии

$$\sum_{k=1}^n i_k d\Psi_k = Md\varphi + dW_M,$$

$$M = \frac{\sum_{k=1}^n i_k d\Psi_k - dW_M}{d\varphi}. \quad (8)$$

В частном случае при повороте контура на угол $d\varphi$ токи во всех контурах меняются таким образом, чтобы потокосцепления оставались неизменными, т.е. $d\Psi_k = 0$, $M = -dW_M / d\varphi$.

Представляет интерес другой частный случай со стабилизированными токами ($i_k = \text{const}$), для которых

$$W_M = \frac{1}{2} \sum i_k \Psi_k, \quad dW_M = \frac{1}{2} d \sum i_k \Psi_k = \frac{1}{2} \sum i_k d\Psi_k.$$

При подстановке в (8):

$$M = \frac{\sum_{k=1}^n i_k d\Psi_k - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n i_k d\Psi_k}{d\varphi} = \frac{dW_M}{d\varphi}.$$

Таким образом, получены следующие результаты:

5.1. В обоих рассмотренных частных случаях приращение энергии магнитного поля dW_M равно механической работе $Md\varphi$.

5.2. В первом частном случае работа совершается за счет изменения энергии поля.

5.3. Во втором частном случае и работа и изменение энергии осуществляются за счет энергии внешних источников.

5.4. На объекты (Idl), испытывающие воздействие со стороны магнитного поля, действуют моменты, если энергия совокупного магнитного поля является функцией углов (одной из сторон которых является $d\mathbf{l}$).

5.5. Для определения моментов нужно аналитические выражения для энергии магнитного поля продифференцировать по углам, функции которых входят в состав этих выражений.

5.6. В первом частном случае поле стремится повернуть взаимодействующий с ним объект таким образом, чтобы энергия поля убывала.

5.7. В случае стабилизированных токов поле стремится повернуть взаимодействующий с ним объект таким образом, чтобы энергия поля возрастала.

Для описания формального аналога электромагнитного поля заимствуются результаты по п. 5.4, 5.5, 5.7., а именно:

5.8. На элементы формальных аналогов токов Idl , испытывающие воздействие со стороны поля, действуют моменты, если энергия совокупного поля является функцией углов (одной из сторон которых является Idl).

5.9. Для определения моментов нужно аналитические выражения для энергии формального аналога электромагнитного поля продифференцировать по углам, функции которых входят в состав этих выражений.

5.10. В случае стабилизированных формальных аналогов токов поле стремится повернуть взаимодействующий с ним элемент Idl таким образом, чтобы энергия поля возрастала.

6. Уточнение величины k_τ

В соответствии с (7) энергия формального аналога электромагнитного поля равна

$$W = \int F dr = m \frac{I_1 dl_1 I_2 dl_2}{4\pi r} [\cos \gamma + (k_\tau - 1) \cos \varphi_1 \cos \varphi_2] + C. \quad (9)$$

Для наглядности можно допустить, что $\alpha = 0$, а углы φ_1 и φ_2 острые, равны между собой и расположены по одну сторону от радиус-вектора.

Пусть $k_\tau > 1$. В соответствии с 5.10. поле стремится повернуть элементы таким образом, чтобы энергия его возросла. А это значит, что моменты M_{12} и M_{21} направлены в одну сторону – в сторону уменьшения φ_1 и φ_2 , и принцип противодействия нарушается. Таким образом, предположение $k_\tau > 1$ неверно.

Пусть $k_\tau < 1$. Моменты M_{12} и M_{21} тоже направлены в одну сторону – в сторону увеличения φ_1 и φ_2 , и принцип противодействия снова нарушается. Таким образом, предположение $k_\tau < 1$ тоже неверно.

Единственным непротиворечивым значением k_τ является $k_\tau = 1$. Несмотря на то, что Ампер применительно к классическому магнитному полю получил другое значение ($k = -0,5$), он сделал правильный вывод:

система стремится уменьшить угол γ , т.е. элементы стремятся повернуться так, чтобы стать параллельными друг другу [2].

Этот вывод распространяется на формальный аналог электромагнитного поля.

При этом выполняется аналог третьего закона Ньютона для моментов

$$d\mathbf{M}_{12} = -d\mathbf{M}_{21}.$$

7. Энергия, силы и моменты для формального аналога электромагнитного поля

Из (9) с учетом того, что $k_\tau = 1$:

$$W \approx \frac{I_1 dl_1 I_2 dl_2}{4\pi r} \cos \gamma + C = m \frac{I_1 d\mathbf{l}_1 \cdot I_2 d\mathbf{l}_2}{4\pi r} + C. \quad (10)$$

$$dF_{12} = -dF_{21} = \frac{\partial W}{\partial r} = -m \frac{l_1 dl_1 l_2 dl_2}{4\pi r^2} \cos \gamma.$$

Для параллельных (антипараллельных) элементов формальных аналогов тока $l d\mathbf{l}$ сила взаимодействия не зависит от углов φ_1 и φ_2 , в частности, соосные элементы притягиваются (отталкиваются) с такой же силой, как и перпендикулярные соединяющему их радиус-вектору (при одинаковом расстоянии между ними). Это также следует из (3) и (5), с учетом того, что $k_\tau = 1$.

Векторная форма записи:

$$d\mathbf{F}_{12} = -d\mathbf{F}_{21} = -\frac{ml_1 l_2}{4\pi r^3} (d\mathbf{l}_1, d\mathbf{l}_2) \mathbf{r}_{12}. \quad (11)$$

Другими словами, ТЗН для формального аналога электромагнитного поля выполняется при любом взаимном расположении элементов формальных аналогов тока $l d\mathbf{l}$.

$$\text{В соответствии с (6) } dF = -m \frac{(l_1 dl_1 \sin \varphi_1)(l_2 dl_2 \sin \varphi_2)}{4\pi r^2} \cos \alpha - m \frac{(l_1 dl_1 \cos \varphi_1)(l_2 dl_2 \cos \varphi_2)}{4\pi r^2}.$$

Первое слагаемое является силой взаимодействия между поперечными составляющими элементов. Второе слагаемое – это сила взаимодействия между продольными составляющими.

Для частного случая, соответствующего (3) ($\varphi_1 = \varphi_2 = \pi/2$, $\alpha = 0$):

$$dF_n = -m \frac{l_1 dl_1 l_2 dl_2}{4\pi r^2}.$$

Для другого частного случая, соответствующего (5) ($\varphi_1 = \varphi_2 = \alpha = 0$):

$$dF_\tau = -m \frac{l_1 dl_1 l_2 dl_2}{4\pi r^2}.$$

Для этих двух частных случаев $dF_n = dF_\tau$, как и указано в начале параграфа.

В соответствии с 5.8. и 5.9. на элементы формальных аналогов тока $l d\mathbf{l}$ действуют моменты

$$dM_{12} = -dM_{21} = \frac{\partial W}{\partial \beta} = -m \frac{l_1 dl_1 l_2 dl_2}{4\pi r} \sin \gamma \quad (12)$$

$$d\mathbf{M}_{12} = -d\mathbf{M}_{21} = -\frac{ml_1 l_2}{4\pi r} [d\mathbf{l}_1, d\mathbf{l}_2].$$

Другими словами, аналог ТЗН для моментов формального аналога электромагнитного поля выполняется при любом взаимном расположении элементов формальных аналогов тока $l d\mathbf{l}$.

$$dM_{\varphi_1} = \frac{\partial W}{\partial \varphi_1} = m \frac{l_1 dl_1 l_2 dl_2}{4\pi r} (\cos \varphi_1 \sin \varphi_2 \cos \alpha - \sin \varphi_1 \cos \varphi_2),$$

$$dM_{\varphi_2} = \frac{\partial W}{\partial \varphi_2} = m \frac{l_1 dl_1 l_2 dl_2}{4\pi r} (\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 \cos \alpha - \cos \varphi_1 \sin \varphi_2),$$

$$dM_\alpha = \frac{\partial W}{\partial \alpha} = -m \frac{l_1 dl_1 l_2 dl_2}{4\pi r} \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \sin \alpha,$$

$$dM = d\bar{F} \operatorname{tg} \gamma, \quad dM_\alpha = dF_n \operatorname{rtg} \alpha, \quad dM_{\varphi_1} = dF_\tau \operatorname{rtg} \varphi_1 - dF_n \operatorname{rctg} \varphi_1, \quad dM_{\varphi_2} = dF_\tau \operatorname{rtg} \varphi_2 - dF_n \operatorname{rctg} \varphi_2.$$

1. Томилин, А.К. Прокопенко, Е.В. Продольные колебания упругого электропроводного стержня в неоднородном магнитном поле // Вестник Томского гос. ун-та. Математика и механика. – 2013. – № 1(21). – С. 104-111.

2. Ампер, А.М. Электродинамика. – М.: АН СССР, 1954. – 492 с.

3. Попов, И.П. Два подхода классиков электромагнетизма к взаимодействию проводников с токами // Вестник Курганского гос. ун-та. Естественные науки. – 2015. – Вып. 7, № 1 (35). – С. 55, 56.

4. Попов, И.П. О некоторых аспектах магнитоэлектрического взаимодействия // Вестник Челябинского гос. ун-та. Физика. – 2009. – Вып. 5, № 24 (162). – С. 34-39.

5. Попов, И.П. Дуально-инверсный аналог силы Ампера для магнитопровода с изменяющимся магнитным потоком, находящегося в электрическом поле // Вестник Курганского гос. ун-та. Естественные науки. – 2009. – Вып. 2, № 1 (15). – С. 51, 52.

6. Попов, И.П. Силы, возникающие в вихревом электрическом поле между магнитопроводами с изменяющимися магнитными потоками // Вестник Курганского гос. ун-та. Технические науки. – 2010. – Вып. 5, № 1 (17). – С. 93, 94.

7. Фихтенгольц, Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. – Т. 3. – М.: Наука, 1966. – 656 с.

8. Корн, Г. Справочник по математике. – М.: Наука, 1977. – 832 с.

9. Бессонов, Л.А. Теоретические основы электротехники. Электромагнитное поле. – М.: Высшая школа, 1986. – 263 с.

ЧАСТЬ 2

В первой части настоящей работы выполнено согласование формального аналога магнито-статике с третьим законом Ньютона (ТЗН). Сделанные в этой связи поправки неизбежно повлияли на формальный аналог электродинамики. Учету этого влияния и посвящена вторая часть статьи. Поскольку первая и вторая части составляют единое целое и для исключения разночтений при ознакомлении с ними, в них использована сквозная нумерация формул, рисунков, разделов и цитируемой литературы.

8. Напряженность для формального аналога электромагнитного поля.

Подразумеваемые (мнимые) векторы. Комбинированные векторы

Для представления (11), подобно (1), в виде произведения двух векторов, один из которых (напряженность) включает в себя $l_1 d\mathbf{l}_1$ и \mathbf{r} , а второй – $l_2 d\mathbf{l}_2$, при этом очевидно, что $l_1 d\mathbf{l}_1$ не должен быть связан с \mathbf{r} векторной операцией, поскольку в (11) он связан с $l_2 d\mathbf{l}_2$ операцией скалярного произведения, в рассмотрение вводятся *подразумеваемые (мнимые) векторы*, или *псевдовекторы*, а также *комбинированные векторы* [10].

Определение 1. Псевдовектор – это скаляр, в котором содержится информация о включенном в него векторе.

Обозначение псевдовектора:

$$\{\mathbf{p}\} = \{ip_x + jp_y + kp_z\}, \quad \{\mathbf{p}\} = p.$$

Определение 2. Комбинированный вектор – это произведение вектора и псевдовектора.

Обозначение комбинированного вектора:

$$\mathbf{b}_u^{\{\mathbf{p}\}} = b \left\{ \frac{\mathbf{p}}{p} \right\} \frac{\mathbf{u}}{u}.$$

Нижний индекс содержит информацию о направлении вектора, верхний индекс – о направлении псевдовектора.

С учетом введенных понятий напряженность для формального аналога электромагнитного поля можно представить в виде:

$$\begin{aligned} |d\mathbf{H}_r^{\{ld\mathbf{l}\}}| &= m \frac{ldl}{4\pi r^2}, \\ d\mathbf{H}_r^{\{ld\mathbf{l}\}} &= -m \frac{ldl}{4\pi r^2} \left\{ \frac{ld\mathbf{l}}{ldl} \right\} \frac{\mathbf{r}}{r} = -\frac{m}{4\pi r^3} \{ld\mathbf{l}\} \mathbf{r}. \end{aligned} \quad (13)$$

Величина напряженности для формального аналога электромагнитного поля, созданного элементом формального аналога тока $ld\mathbf{l}$, не зависит от угла между радиус-вектором \mathbf{r} и $ld\mathbf{l}$.

9. Третье и четвертое противоречия классической модели магнитного поля

В описаниях силовых полей, созданных ранее классической модели магнитного поля, – гравитационного и электростатического – напряженность определяется как сила, действующая на единичный объект, порождающий поле. Соответственно этому направление вектора напряженности естественным образом совпадает с направлением вектора силы. В классической модели магнитного поля вектор напряженности ортогонален вектору силы. В модели формального аналога электромагнитного поля это противоречие устранено.

У гравитационного и электростатического полей напряженность зависит от свойств среды. При этом в описании электростатического поля индукция от свойств среды не зависит [11]. В классической модели магнитного поля всё наоборот [12]. В этом заключается его четвертое противоречие с традиционной моделью поля. Нет причины переносить это противоречие на модель формального аналога электромагнитного поля.

10. Индукция и потенциал для формального аналога электромагнитного поля

Индукция для формального аналога электромагнитного поля

$$d\mathbf{B}_r^{(Idl)} = -\frac{Idl}{4\pi r^2} \left\{ \frac{Idl}{Idl} \right\} \frac{\mathbf{r}}{r} = -\frac{1}{4\pi r^3} \{Idl\} \mathbf{r}. \quad (14)$$

$$\mathbf{H} = m\mathbf{B}.$$

Формальный аналог электромагнитного поля имеет радиальный характер, следовательно, оно является потенциальным. При $dl \rightarrow 0$ эквипотенциальными поверхностями являются сферы. Для такого поля в соответствии с [1]

$$d\mathbf{H}_r^{(Idl)} = \text{grad}\varphi,$$

где φ – потенциал поля.

Если выбрать систему координат таким образом, чтобы ось абсцисс совпала с радиус-вектором, то

$$d\mathbf{H}_r^{(Idl)} = -\frac{m}{4\pi r^2} \{Idl\} \frac{\mathbf{r}}{r} = -\frac{m}{4\pi r^2} \{Idl\} \mathbf{i} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \mathbf{i},$$

$$\varphi = \frac{m}{4\pi x} \{Idl\} + C_\varphi = \frac{m}{4\pi r} \{Idl\} + C_\varphi.$$

11. Свойства мнимых и комбинированных векторов и операции с ними

$$11.1. \left| \mathbf{e}_u^{(i)} \right| = e.$$

$$11.2. \mathbf{u}_u^{(i)} = \mathbf{u}^{(i)} = \mathbf{u} \left\{ \frac{\mathbf{p}}{p} \right\}. \quad 11.2.1. \mathbf{p}_u^{(i)} = \{\mathbf{p}\} \frac{\mathbf{u}}{u}.$$

$$11.3. e\{\mathbf{p}\} = \{e\mathbf{p}\}.$$

11.4. При взаимодействии мнимых векторов на них распространяются все правила операций с векторами.

11.5. Мнимый вектор и вектор взаимодействуют между собой как скаляр и вектор.

11.6. При взаимодействии комбинированных векторов между собой могут использоваться двойные записи операций: « $\{\cdot\} \cdot$ », « $\{\cdot\} \times$ », « $\{\times\} \cdot$ », « $\{\times\} \times$ », « $\{\cdot\} +$ », « $\{\times\} +$ », « $\{\cdot\} \times$ », « $\{\cdot\} +$ », « $\{\cdot\} \cdot$ ». Операция в скобках связывает мнимые векторы. Вторая операция связывает векторы. При перемножении псевдовектора и комбинированного вектора нет необходимости размещать знак произведения в скобки. Очевидно, что знак произведения « \cdot » или « \times » в этом случае распространяется на псевдовекторные составляющие.

11.7. При необходимости скобки раскрываются применением двойных скобок, – например, $\{e\{\mathbf{p}\}\} = e\mathbf{p}$.

11.8. В присутствии вектора \mathbf{u} скобка раскрываться не может. Исключение составляет случай, когда выражение, стоящее в скобке, является скаляром, – например, в результате скалярного произведения векторов. Так:

$$11.9. \mathbf{p}_u^{(p)} \{ \cdot \} + \mathbf{q}_v^{(q)} = \{ \mathbf{p} \} \frac{\mathbf{u}}{u} \{ \cdot \} + \{ \mathbf{q} \} \frac{\mathbf{v}}{v} = \{ \mathbf{p} \mathbf{q} \} \left(\frac{\mathbf{u}}{u} + \frac{\mathbf{v}}{v} \right) = pq \cos(p, q) \left(\frac{\mathbf{u}}{u} + \frac{\mathbf{v}}{v} \right).$$

11.10. В отсутствии вектора \mathbf{u} скобка не раскрывается, если другая часть равенства является скалярной величиной.

$$11.11. \mathbf{e}_u^{(p)} + \mathbf{b}_v^{(q)} = e \left\{ \frac{\mathbf{p}}{p} \right\} \frac{\mathbf{u}}{u} + b \left\{ \frac{\mathbf{q}}{q} \right\} \frac{\mathbf{v}}{v} = \left\{ \frac{\mathbf{p}}{p} \right\} \left(e \frac{\mathbf{u}}{u} + b \frac{\mathbf{v}}{v} \right) = \left\{ \frac{\mathbf{p}}{p} \right\} \mathbf{c} = \mathbf{c}^{(p)}.$$

$$11.12. \mathbf{e}_u^{(p)} + \mathbf{b}_u^{(q)} = e \left\{ \frac{\mathbf{p}}{p} \right\} \frac{\mathbf{u}}{u} + b \left\{ \frac{\mathbf{q}}{q} \right\} \frac{\mathbf{u}}{u} = \frac{\mathbf{u}}{u} \left\{ e \frac{\mathbf{p}}{p} + b \frac{\mathbf{q}}{q} \right\} = \frac{\mathbf{u}}{u} \{ \mathbf{c} \} = c \left\{ \frac{\mathbf{c}}{c} \right\} \frac{\mathbf{u}}{u} = \mathbf{c}_u^{(c)}.$$

$$11.12.1. \mathbf{e}^{(p)} + \mathbf{e}^{(q)} = \mathbf{e} \left\{ \frac{\mathbf{p}}{p} \right\} + \mathbf{e} \left\{ \frac{\mathbf{q}}{q} \right\} = \mathbf{e} \left\{ \frac{\mathbf{p} + \mathbf{q}}{p + q} \right\} = \mathbf{e} \{ \mathbf{r} \} = \mathbf{e}^{(r)}.$$

$$11.12.2. \{ \mathbf{p} \} + \{ \mathbf{q} \} = \{ \mathbf{q} \} + \{ \mathbf{p} \} = \{ \mathbf{p} + \mathbf{q} \}.$$

$$11.13. \mathbf{e}_u^{(p)} \cdot b^{(q)} = e \left\{ \frac{\mathbf{p}}{p} \right\} \frac{\mathbf{u}}{u} \cdot b \left\{ \frac{\mathbf{q}}{q} \right\} = eb \left\{ \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{q}}{p \cdot q} \right\} \frac{\mathbf{u}}{u} = eb \left(\frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{q}}{p \cdot q} \right) \frac{\mathbf{u}}{u} = c \frac{\mathbf{u}}{u} = \mathbf{c}_u.$$

$$11.13.1. \{ \mathbf{p} \} \{ \mathbf{q} \} = \{ \mathbf{p} \mathbf{q} \} = \mathbf{p} \mathbf{q}.$$

$$11.14. \mathbf{e}_u^{(p)} \times b^{(q)} = e \left\{ \frac{\mathbf{p}}{p} \right\} \frac{\mathbf{u}}{u} \times b \left\{ \frac{\mathbf{q}}{q} \right\} = eb \left\{ \frac{\mathbf{p} \times \mathbf{q}}{p \cdot q} \right\} \frac{\mathbf{u}}{u} = \mathbf{c}_u^{(r)}.$$

$$11.14.1. \{ \mathbf{p} \} \times \{ \mathbf{q} \} = \{ \mathbf{p} \times \mathbf{q} \}.$$

$$11.14.2. \mathbf{e}_u^{(p)} \times b^{(p)} = 0.$$

$$11.15. \{ \nabla \} e = \left\{ \mathbf{i} \frac{\partial e}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial e}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial e}{\partial z} \right\}.$$

$$11.16. \{ \nabla \} \{ \mathbf{p} \} = \left\{ \frac{\partial p_x}{\partial x} + \frac{\partial p_y}{\partial y} + \frac{\partial p_z}{\partial z} \right\} = \frac{\partial p_x}{\partial x} + \frac{\partial p_y}{\partial y} + \frac{\partial p_z}{\partial z} = \nabla \cdot \mathbf{p}.$$

$$11.17. \{ \nabla \} \times \{ \mathbf{p} \} = \{ \nabla \times \mathbf{p} \}.$$

12. Связь между величинами формального аналога электромагнитного поля

$$d\mathbf{F}_{12} = d\mathbf{H}_r^{(I_1 d\mathbf{l}_1)} \cdot \{ I_2 d\mathbf{l}_2 \} = -\frac{m}{4\pi r^3} \{ I_1 d\mathbf{l}_1 \} \mathbf{r} \cdot \{ I_2 d\mathbf{l}_2 \} = -m \frac{\{ I_1 d\mathbf{l}_1 \cdot I_2 d\mathbf{l}_2 \}}{4\pi r^3} \mathbf{r} = -m \frac{I_1 d\mathbf{l}_1 \cdot I_2 d\mathbf{l}_2}{4\pi r^3} \mathbf{r}_{12}, \quad (15)$$

что совпадает с (11). Полученное выражение существенно отличается от (1), которое принято называть законом Ампера.

$$\begin{aligned} d\mathbf{M}_{12} &= \left\{ d\mathbf{H}_r^{(I_1 d\mathbf{l}_1)} \{ \times \} \cdot \{ I_2 d\mathbf{l}_2 \} \mathbf{r} \right\} = \left\{ -\frac{m}{4\pi r^3} \{ I_1 d\mathbf{l}_1 \} \mathbf{r} \{ \times \} \cdot \{ I_2 d\mathbf{l}_2 \} \mathbf{r} \right\} = \\ &= -\left\{ \frac{m \{ I_1 d\mathbf{l}_1 \times I_2 d\mathbf{l}_2 \}}{4\pi r^3} (\mathbf{r} \mathbf{r}) \right\} = -\frac{m I_1 I_2}{4\pi r} [d\mathbf{l}_1, d\mathbf{l}_2], \end{aligned} \quad (16)$$

что совпадает с (12)

$$W = \varphi \cdot \{ I_2 d\mathbf{l}_2 \} = \frac{m}{4\pi r} \{ I_1 d\mathbf{l}_1 \} \cdot \{ I_2 d\mathbf{l}_2 \} + C = m \frac{I_1 d\mathbf{l}_1 \cdot I_2 d\mathbf{l}_2}{4\pi r} + C, \text{ что совпадает с (10).}$$

13. Теорема Гаусса для формального аналога электромагнитного поля

Поскольку формальный аналог электромагнитного поля имеет радиальный характер, для него выполняется теорема Гаусса

$$\int_S \mathbf{B}_r^{\{\sum I\Delta l + \sum I_{cm}\Delta l\}} \cdot d\mathbf{s} = \{\sum I\Delta l + \sum I_{cm}\Delta l\},$$

где S – площадь замкнутой поверхности, ограничивающей некоторый объем; I_{cm} – формальный аналог тока смещения.

В дифференциальной форме

$$\operatorname{div} \mathbf{B}_r^{\left\{ \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right\}} = \nabla \cdot \mathbf{B}_r^{\left\{ \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right\}} = \left\{ \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right\}, \quad (17)$$

где \mathbf{j} – формальный аналог плотности тока; $\partial \mathbf{D} / \partial t$ – формальный аналог плотности тока смещения; \mathbf{D} – формальный аналог электрического смещения или электрической индукции.

Скобки могут быть раскрыты двойными скобками (11.7)

$$\left\{ \operatorname{div} \mathbf{B}_r^{\left\{ \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right\}} \right\} = \left\{ \left\{ \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right\} \right\} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}.$$

Еще одним противоречием классической модели магнитного поля является равенство нулю его дивергенции.

Непрекращающиеся попытки отыскания в рамках классической теории магнитного заряда и магнитного монополя равносильны попыткам опровержения известного математического тождества $\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{H} \equiv 0$.

В то же время элемент $l d l$ удовлетворяет представлениям о магнитном заряде. Соответственно абстрактное поле (13), (14), им порожденное, удовлетворяет представлениям о магнитном монополе.

14. Деление векторов

Для целей дальнейшего рассмотрения требуется определить операции деления вектора на вектор [10].

12.1. Скалярное деление двух векторов

Определение. Частное \mathbf{e} / \mathbf{b} от скалярного деления вектора \mathbf{e} на вектор \mathbf{b} есть скаляр

$$p = \frac{\mathbf{e}}{\mathbf{b}} = \mathbf{e} \cdot \frac{1}{\mathbf{b}} = \mathbf{e} \cdot \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}} = \frac{1}{b^2} (\mathbf{e} \cdot \mathbf{b}) = \frac{c}{b^2} = \frac{e}{b} \cos \theta, \quad (18)$$

где θ – угол между векторами \mathbf{e} и \mathbf{b} . При этом $\frac{\mathbf{e} \cdot \mathbf{b}}{\mathbf{b} \cdot \mathbf{e}} = \cos^2 \theta$.

12.2. Векторное деление двух векторов

Определение. Частное $\mathbf{e} \div \mathbf{b}$ от векторного деления вектора \mathbf{e} на вектор \mathbf{b} есть вектор

$$\mathbf{q} = \mathbf{e} \div \mathbf{b} = \mathbf{e} \times \frac{1}{\mathbf{b}} = \mathbf{e} \times \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}} = \frac{1}{b^2} (\mathbf{e} \times \mathbf{b}) = \frac{\mathbf{d}}{b^2} = \frac{e}{b} \frac{\mathbf{d}}{d} \sin \theta. \quad (19)$$

При этом

$$(\mathbf{e} \div \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{b} \div \mathbf{e}) = -\sin^2 \theta, \quad \frac{\mathbf{e} \cdot \mathbf{b}}{\mathbf{b} \cdot \mathbf{e}} - (\mathbf{e} \div \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{b} \div \mathbf{e}) = 1, \quad p^2 + q^2 = \frac{e^2}{b^2}.$$

12.3. Теоремы о полном делении векторов

12.3.1. Если известны частные от скалярного p и векторного \mathbf{q} деления двух векторов \mathbf{e} и \mathbf{b} , а также делитель \mathbf{b} , то делимое определяется, как

$$\mathbf{e} = \mathbf{b} p + \mathbf{b} \times \mathbf{q}.$$

Доказательство

$$\mathbf{b}p + \mathbf{b} \times \mathbf{q} = \frac{1}{b^2} [\mathbf{b}(\mathbf{e} \cdot \mathbf{b}) + \mathbf{b} \times (\mathbf{e} \times \mathbf{b})] = \frac{1}{b^2} [\mathbf{b}(\mathbf{e} \cdot \mathbf{b}) + \mathbf{e}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}) - \mathbf{b}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{e})] = \mathbf{e}.$$

12.3.2. Если известны частные от скалярного p и векторного \mathbf{q} деления двух векторов \mathbf{e} и \mathbf{b} , а также делимое \mathbf{e} , то делитель определяется как:

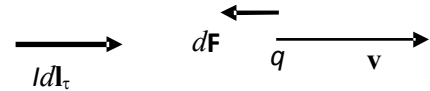
$$\mathbf{b} = \frac{p\mathbf{e} + \mathbf{q} \times \mathbf{e}}{p^2 + \mathbf{q}^2}.$$

Доказательство

$$\frac{p\mathbf{e} + \mathbf{q} \times \mathbf{e}}{p^2 + \mathbf{q}^2} = \frac{1}{b^2} \frac{b^2}{e^2} [(\mathbf{e} \cdot \mathbf{b})\mathbf{e} + (\mathbf{e} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{e}] = \frac{1}{e^2} [(\mathbf{e} \cdot \mathbf{b})\mathbf{e} + \mathbf{b}(\mathbf{e} \cdot \mathbf{e}) - \mathbf{e}(\mathbf{e} \cdot \mathbf{b})] = \mathbf{b}.$$

15. Формальный аналог индуцированного электрического поля

Формальный аналог напряженности электрического поля – это сила, действующая на единичный формальный аналог электрического заряда q . Пусть последний движется со скоростью \mathbf{v} . Могут быть рассмотрены следующие частные случаи.



15.1. Продольное движение (рис. 2)

Рис. 2. Продольное движение.

В соответствии с (15) формальный аналог напряженности электрического поля

$$\begin{aligned} dE_\tau &= \frac{d\mathbf{F}}{dq} = \frac{1}{dq} d\mathbf{H}_r^{(Idl_\tau)} \cdot \{I_q d\mathbf{l}_q\} = \frac{1}{dq} d\mathbf{H}_r^{(Idl_\tau)} \cdot \left\{ \frac{dq}{dt} d\mathbf{l}_q \right\} = d\mathbf{H}_r^{(Idl_\tau)} \cdot \left\{ \frac{d\mathbf{l}_q}{dt} \right\} = d\mathbf{H}_r^{(Idl_\tau)} \cdot \{\mathbf{v}\} = \\ &= -\frac{m}{4\pi r^3} \{Idl_\tau\} \mathbf{r} \cdot \{\mathbf{v}\} = -\frac{m}{4\pi r^3} \{Idl_\tau \cdot \mathbf{v}\} \mathbf{r} = -\frac{m Idl_\tau}{4\pi r^3} v \mathbf{r} = -\frac{m Idl_\tau}{4\pi r^2} v \frac{Idl_\tau}{Idl_\tau} = dH_\tau v \frac{Idl_\tau}{Idl_\tau} \end{aligned} \quad (20)$$

В скалярной форме

$$dE_\tau = dH_\tau v.$$

Формальный аналог ЭДС

$$d\mathcal{E} = dE_\tau dl = dH_\tau v dl.$$

15.2. Поперечное движение (рис. 3)

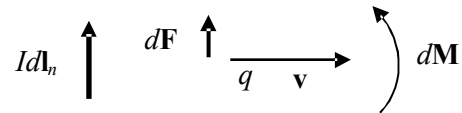


Рис. 3. Поперечное движение.

В соответствии с (16):

$$d\mathbf{M} = \{d\mathbf{H}_r^{(Idl_n)}\} \{ \times \} \cdot \{ I_q d\mathbf{l}_q \} \mathbf{r} = \{d\mathbf{H}_r^{(Idl_n)}\} \{ \times \} \cdot \{ dq\mathbf{v} \} \mathbf{r}.$$

С другой стороны

$$d\mathbf{M} = [\mathbf{r}, d\mathbf{F}].$$

В соответствии с (19):

$$\begin{aligned} d\mathbf{F}_n &= d\mathbf{M} \div \mathbf{r} = \{d\mathbf{H}_r^{(Idl_n)}\} \{ \times \} \cdot \{ dq\mathbf{v} \} \mathbf{r} \div \mathbf{r} = \{d\mathbf{H}_r^{(Idl_n)}\} \{ \times \} \cdot \{ dq\mathbf{v} \} \mathbf{r} \times \frac{\mathbf{r}}{r^2}, \\ d\mathbf{E}_n &= \frac{d\mathbf{F}_n}{dq} = \frac{1}{dq} d\mathbf{M} \div \mathbf{r} = \{d\mathbf{H}_r^{(Idl_n)}\} \{ \times \} \cdot \{ \mathbf{v} \} \mathbf{r} \div \mathbf{r} = \{d\mathbf{H}_r^{(Idl_n)}\} \{ \times \} \cdot \{ \mathbf{v} \} \mathbf{r} \times \frac{\mathbf{r}}{r^2} = \\ &= -\frac{m}{4\pi r^3} \{ \{ Idl_n \} \mathbf{r} \{ \times \} \cdot \{ \mathbf{v} \} \mathbf{r} \} \times \frac{\mathbf{r}}{r^2} = -\frac{m}{4\pi r^3} \{ \{ Idl_n \times \mathbf{v} \} \mathbf{r} \mathbf{r} \} \times \frac{\mathbf{r}}{r^2} = -\frac{m}{4\pi r^3} (Idl_n \times \mathbf{v}) \times \mathbf{r} = \\ &= -\frac{m}{4\pi r^2} v (-Idl_n) = \frac{m}{4\pi r^2} v Idl_n = -dH_n v \frac{Idl_n}{Idl_n}. \end{aligned} \quad (21)$$

В скалярной форме: $dE_n = -dH_n v$.

Формальный аналог ЭДС: $d\mathcal{E} = dE_n dl = -dH_n v dl$.

16. Изменяющееся поле

Для точки, расположенной в конце радиус-вектора \mathbf{r} , изменение величины $l d\mathbf{l}$ равносильно перемещению вектора $l d\mathbf{l}$ вдоль радиус-вектора \mathbf{r} с некоторой скоростью. Это дает возможность использовать результаты предыдущего раздела.

16.1. Продольное (относительно $l d\mathbf{l}$) поле

На рис. 2 заряд удаляется от источника поля, поэтому оно уменьшается. Если заряд неподвижен, то для уменьшения поля источник должен двигаться со скоростью, имеющей противоположный знак.

С учетом этого и в соответствии с (20):

$$d\mathbf{E}_\tau = -dH_\tau \frac{l d\mathbf{l}_\tau}{l d\mathbf{l}_\tau} = -dH_\tau \frac{dr}{dt} \frac{l d\mathbf{l}_\tau}{l d\mathbf{l}_\tau}, \quad \frac{d\mathbf{E}_\tau}{dr} = -\frac{dH_\tau}{dt} \frac{l d\mathbf{l}_\tau}{l d\mathbf{l}_\tau}, \quad \frac{d\mathbf{E}_\tau}{dr} = -\frac{dH_\tau}{dt}. \quad (22)$$

16.2. Поперечное (относительно $l d\mathbf{l}$) поле

В соответствии с (21):

$$\frac{d\mathbf{E}_n}{dr} = \frac{dH_n}{dt} \frac{d\mathbf{l}_n}{l d\mathbf{l}_n}, \quad \frac{d\mathbf{E}_n}{dr} = \frac{dH_n}{dt}. \quad (23)$$

В произвольной точке поле можно разложить на продольную и поперечную составляющие.

$$\frac{d\mathbf{E}}{dr} = \frac{d\mathbf{E}_\tau}{dr} + \frac{d\mathbf{E}_n}{dr} = \frac{dH}{dt} \left(\frac{l d\mathbf{l}_n}{l d\mathbf{l}_n} - \frac{l d\mathbf{l}_\tau}{l d\mathbf{l}_\tau} \right) = \frac{dH}{dt} \left(\frac{l d\mathbf{l}_n - l d\mathbf{l}_\tau}{l d\mathbf{l}} \right) = \frac{dH}{dt} \frac{l d\mathbf{l}^*}{l d\mathbf{l}}. \quad (24)$$

Здесь $l d\mathbf{l}^*$ – вектор, сопряженный вектору $l d\mathbf{l}$ [10] (см.

рис. 4).

Выражения (20) – (24) являются формальными аналогами закона электромагнитной индукции, которые в отличие от классической феноменологической модели электромагнитного поля являются простым следствием других свойств и соотношений поля.

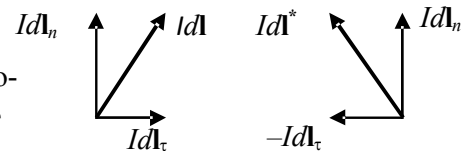


Рис. 4. Сопряженные векторы.

17. Скалярная векторная производная

Скалярную векторную производную можно интерпретировать как скалярное деление (18) дифференциалов двух векторов.

$$\begin{aligned} d\mathbf{a} \cdot \frac{1}{d\mathbf{b}} &= d(a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}) \cdot \frac{1}{d(b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} + b_z \mathbf{k})} = (da_x \mathbf{i} + da_y \mathbf{j} + da_z \mathbf{k}) \cdot \frac{1}{db_x \mathbf{i} + db_y \mathbf{j} + db_z \mathbf{k}} = \\ &= da_x \mathbf{i} \cdot \frac{1}{db_x \mathbf{i} + db_y \mathbf{j} + db_z \mathbf{k}} + da_y \mathbf{j} \cdot \frac{1}{db_x \mathbf{i} + db_y \mathbf{j} + db_z \mathbf{k}} + da_z \mathbf{k} \cdot \frac{1}{db_x \mathbf{i} + db_y \mathbf{j} + db_z \mathbf{k}} = \\ &= \frac{da_x db_x}{(db_x)^2} + \frac{da_y db_y}{(db_y)^2} + \frac{da_z db_z}{(db_z)^2} = \frac{da_x}{db_x} + \frac{da_y}{db_y} + \frac{da_z}{db_z}. \end{aligned}$$

Представляет интерес частный случай, когда берется скалярная производная по радиус-вектору

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}.$$

Имеем:

$$d\mathbf{a} \cdot \frac{1}{d\mathbf{r}} = \frac{da_x}{dx} + \frac{da_y}{dy} + \frac{da_z}{dz} = \text{div} \mathbf{a} = \nabla \cdot \mathbf{a}.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{d}{d\mathbf{r}} = \nabla. \quad (25)$$

18. Формальный аналог полной системы уравнений Максвелла в дифференциальной форме

Очевидным образом формальный аналог третьего уравнения Максвелла математически изоморфен оригиналу: $\operatorname{div} \mathbf{D} = \frac{dq}{dV}$.

В качестве четвертого уравнения следует рассматривать полученное выше выражение теоремы Гаусса для формального аналога электромагнитного поля.

Аналогом первого уравнения можно считать (24). Для получения аналога второго уравнения в (17) можно использовать (25):

$$\nabla \cdot \mathbf{B}_r^{\left\{j + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\right\}} = d \mathbf{B}_r^{\left\{j + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\right\}} \cdot \frac{1}{d\mathbf{r}} = \left\{ \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right\}, \quad (26)$$

$$\frac{d\mathbf{B}}{dr} = \mathbf{j} + \frac{d\mathbf{D}}{dt}.$$

Таким образом, аналог полной системы уравнений Максвелла в дифференциальной форме имеет вид:

$$\text{I. } \frac{d\mathbf{E}}{dr} = \frac{dH}{dt} \frac{d\mathbf{l}^*}{dl}, \quad \text{II. } d \mathbf{B}_r^{\left\{j + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\right\}} \cdot \frac{1}{d\mathbf{r}} = \left\{ \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right\},$$

$$\text{III. } \operatorname{div} \mathbf{D} = \frac{dq}{dV}, \quad \text{IV. } \left\{ \operatorname{div} \mathbf{B}_r^{\left\{j + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\right\}} \right\} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}.$$

Здесь $\mathbf{D} = e\mathbf{E}$, где e – формальный аналог диэлектрической проницаемости.

19. Формальный аналог электромагнитных волн

Совместное решение (23) (для поперечного поля) и (26) при условии $j = 0$ дает:

$$\frac{d^2 E_n}{dr dt} = m \frac{d^2 B_n}{dt^2}, \quad \frac{d^2 B_n}{dr^2} = e \frac{d^2 E_n}{dr dt}, \quad \frac{d^2 B_n}{dr^2} = em \frac{d^2 B_n}{dt^2}.$$

Последнее – классическое волновое уравнение. Его решение представляет собой монохроматическую волну:

$$B_n = B_{n0} e^{i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r} + \delta)},$$

где ω – циклическая частота; \mathbf{k} – волновое число; δ – начальная фаза.

Скорость волны:

$$c = \frac{1}{\sqrt{em}}.$$

Аналогично находится формальный аналог электрической (поперечной) составляющей волны:

$$E_n = E_{n0} e^{i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r} + \delta)}.$$

Очевидно, что от продольной составляющей аналога электрического поля (22) волна не возникает.

Заключение

Классическая модель электромагнитного поля имеет следующие особенности:

- допускает нарушение ТЗН;
- исключает взаимодействие соосных элементов проводников с токами;
- не предусматривает существования моментов сил, действующих на элементы проводников;
- направление вектора напряженности поля не совпадает с направлением вектора силы, действующей на элемент проводника с током;

индукция зависит от свойств среды, а напряженность – нет;

дивергенция поля равна нулю;

законом Ампера принято считать формулу, в общем случае не совместимую с его основным результатом;

закон электромагнитной индукции является феноменологическим.

Указанные особенности, по-видимому, в меньшей степени обусловлены субъективными факторами и в значительной степени являются следствием ограниченности арсенала средств векторной алгебры. Не вводя в рассмотрение мнимые и комбинированные векторы и имея возможность использовать только операции произведения векторов, невозможно выражение (1) сконструировать как-то иначе – так, в частности, чтобы не нарушался ТЗН.

Построенная модель формального аналога электромагнитного поля этих особенностей не имеет, в частности, формальные аналоги закона электромагнитной индукции являются простым следствием других свойств и соотношений поля.

Построенная модель удовлетворяет основному требованию Ампера для магнитостатики – безусловному выполнению ТЗН.

Кроме того, в абстрактной модели ключевую роль необходимо играет магнитный заряд Idl и магнитный монополю $d\mathbf{H}_r^{(dl)}$.

10. Попов, И.П. Разновидности оператора набла // Вестник Амурского гос. ун-та. Естественные и экономические науки. – 2015. – Вып. 71. – С. 20 – 32.

11. Ефимова, О.В., Стукова, Е.В. Исследование диэлектрических свойств сегнетоэлектрического композита $(\text{NaNbO}_3)_{1-x}/(\text{LiNbO}_3)_x$ // Вестник Амурского гос. ун-та. Естественные и экономические науки. 2015. – Вып. 71. – С. 39–41.

12. Родина, Т.А., Лосева, О.В. Мультиядерная МАS ЯМР (^{13}C , ^{113}Cd) спектроскопия гетерополиядерных ди-тиокарбаматов золота(III)-кадмия // Вестник Амурского гос. ун-та. Естественные и экономические науки. – 2015. – Вып. 71. – С. 133–141.