

УДК 519.853.2 + 519.632

Н.Н. Максимова, Р.А. Гладышев

**ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ВАРИАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ С ПРЕПЯТСТВИЕМ
С ПРИМЕНЕНИЕМ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ**

В статье проводится численное исследование полукоэрцитивной вариационной задачи с препятствием в одномерной постановке. Найдено решение при аппроксимации по методу конечных элементов и последующем решении конечномерной оптимизационной задачи при помощи метода Зейделя с проекцией на допустимое множество. Алгоритм реализован в ППП «Matlab 2010».

Ключевые слова: задача с препятствием, метод конечных элементов, метод Зейделя с проекцией.

**NUMERICAL INVESTIGATION OF VARIATIONAL PROBLEM WITH PREP-ACTION
WITH THE FINITE ELEMENT METHOD APPLICATION**

In this paper a numerical study of semi-coercive variational problem with an obstacle in the one-dimensional setting is conducted. A solution is found in the approximation by finite element method. A solution of finite-dimensional optimization problem is found by the method of Seidel with the projection onto the feasible set. The algorithm is implemented in AP «Matlab 2010».

Key words: Problem with Prep-Action, Finite Element Method, Method Seidel with Projection.

Введение

Многие задачи математической физики, механики допускают естественную вариационную постановку. Данная постановка состоит в отыскании экстремума некоторого функционала, т.е. нужно найти решение экстремальной задачи. Постановка в виде экстремальной задачи позволяет применить для решения эффективные оптимизационные алгоритмы.

Большинство задач являются нелинейными из-за наличия неравенств в дополнительных условиях. Такие задачи носят название «задачи с неизвестной границей» в силу того, что заранее неизвестно, как поведет себя решение – будет ли на определенном участке области выполняться равенство или строгое неравенство.

Исследование по численному анализу вариационных задач проводится с использованием метода конечных элементов. Метод конечных элементов впервые был предложен в 40-х гг. XX в. Систематическое изложение теоретических основ метода конечных элементов имеется в работе [1], в ней же ведется исследование ряда вариационных неравенств с использованием схемы метода конечных элементов. Большой вклад в данный вопрос вносит работа французских математиков [2], подробно исследовавших применение метода конечных элементов для аппроксимации непрерывных задач и методы решения получаемых их конечномерных аналогов.

В работе при постановке задач используется аппарат функционального анализа, с изложением основ которого можно ознакомиться, например, в работах [3, 4].

Постановка задачи

Рассмотрим классический пример задачи о препятствии, физическая постановка которой заключается в следующем [5]. Пусть тонкая упругая мембрана с натяжением τ закреплена по контуру Γ , ограничивающему область $\Omega \subset R^2$, и находится под действием «вертикальной» силы плотности f . Предположим также, что прогибы мембраны ограничены «снизу» жестким препятствием, описываемым функцией ψ . Требуется описать положение равновесия мембраны.

Одной из математических формулировок данной задачи является вариационное исчисление. Эта формулировка выражает известный в механике вариационный принцип Дирихле: среди всех допустимых положений мембрана в состоянии равновесия занимает положение с минимальной энергией. Возможные прогибы мембраны описываются множеством:

$$K = \left\{ v \in \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega) : v(x) \geq \psi(x) \quad \text{н.в. в } \Omega \right\},$$

функционал потенциальной энергии имеет вид

$$F(v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \tau |\nabla v|^2 dx - \int_{\Omega} f v dx.$$

Таким образом, необходимо найти решение следующей вариационной задачи:

$$\begin{cases} J(v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \tau |\nabla v|^2 dx - \int_{\Omega} f v dx \rightarrow \min \\ v \in K = \left\{ v \in \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega) : v(x) \geq \psi(x) \quad \text{н.в. в } \Omega \right\}. \end{cases} \quad (1)$$

Будем рассматривать одномерную постановку задачи, положив $\tau \equiv 1$:

$$\begin{cases} J(v) = \frac{1}{2} \int_0^1 v^2 dx - \int_0^1 f v dx \rightarrow \min, \\ v \in K = \left\{ v \in \overset{\circ}{W}_2^1(0, 1), \quad v(x) \geq \psi(x) \quad \text{н. в. в } (0, 1) \right\}. \end{cases} \quad (2)$$

Аппроксимация задачи по методу конечных элементов

Аппроксимируем задачу (1) по методу конечных элементов [6, 7]. Разобьем промежутки $(0, 1)$ точками $x_{i+1} = x_i + i \cdot h$ ($i = \overline{0, N}$), где $h = \frac{1}{N}$ – шаг аппроксимации. Базисные функции метода конечных элементов выберем кусочно-линейными, исходя из условия

$$\varphi_i(x_j) = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Таким образом, имеем:

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} 1 + \frac{x - x_i}{h}, & x \in [x_{i-1}, x_i], \\ 1 - \frac{x - x_i}{h}, & x \in [x_i, x_{i+1}]. \end{cases}$$

Тогда

$$\varphi'_i(x) = \begin{cases} \frac{1}{h}, & x \in [x_{i-1}, x_i], \\ -\frac{1}{h}, & x \in [x_i, x_{i+1}]. \end{cases}$$

Приближенное решение отыскивается в виде

$$v_I(x) = \sum_{i=1}^{N+1} v_i \varphi_i(x). \quad (3)$$

Подставляя данное выражение (3) в функционал задачи (2), получим следующее:

$$\begin{aligned} \int_0^1 v_I'^2 dx &= \sum_{i=1}^N \int_{x_i}^{x_{i+1}} v_I'^2 dx = \sum_{i=1}^N \int_{x_i}^{x_{i+1}} (v_i \varphi_i(x) + v_{i+1} \varphi_{i+1}(x))'^2 dx = \\ &= \sum_{i=1}^N \int_{x_i}^{x_{i+1}} (v_i \varphi_i'(x) + v_{i+1} \varphi_{i+1}'(x))^2 dx = \sum_{i=1}^N \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(v_i \left(-\frac{1}{h} \right) + v_{i+1} \left(\frac{1}{h} \right) \right)^2 dx = \\ &= \sum_{i=1}^N \frac{1}{h^2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (v_{i+1} - v_i)^2 dx = \sum_{i=1}^N \frac{(v_{i+1} - v_i)^2}{h^2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} dx = \sum_{i=1}^N \frac{(v_{i+1} - v_i)^2}{h^2} h = \\ &= \sum_{i=1}^N \frac{(v_{i+1} - v_i)^2}{h} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{h} (v_{i+1}^2 - 2v_i v_{i+1} + v_i^2). \end{aligned}$$

Таким образом, получаем аппроксимацию первого интеграла функционала энергии:

$$\int_0^1 v_I'^2 dx = \frac{1}{h} \left(v_1^2 + v_{N+1}^2 + 2 \sum_{i=2}^N v_i^2 - 2 \sum_{i=1}^N v_i v_{i+1} \right). \quad (4)$$

Исходя из вычислений, получаем матрицу жесткости:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{h} & -\frac{1}{h} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{h} & \frac{2}{h} & -\frac{1}{h} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\frac{1}{h} & \frac{2}{h} & -\frac{1}{h} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{h} & -\frac{1}{h} \end{pmatrix}. \quad (5)$$

После аппроксимации второго слагаемого в функционале (2), предполагая, что $f = C - const$, получим следующее:

$$\begin{aligned} \int_0^1 f v_I dx &= f \sum_{i=1}^N \int_{x_i}^{x_{i+1}} v_I dx = f \sum_{i=1}^N \int_{x_i}^{x_{i+1}} (v_i \varphi_i(x) + v_{i+1} \varphi_{i+1}(x)) dx = \\ &= f \sum_{i=1}^N \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(v_i \left(1 - \frac{x - x_i}{h} \right) + v_{i+1} \left(1 + \frac{x - x_{i+1}}{h} \right) \right) dx = \\ &= f \sum_{i=1}^N \left(v_i \left(1 - \frac{x - x_i}{h} \right)^2 \frac{1}{2 \left(-\frac{1}{h} \right)} + v_{i+1} \left(1 + \frac{x - x_{i+1}}{h} \right)^2 \frac{1}{2 \left(\frac{1}{h} \right)} \right) \Bigg|_{x_i}^{x_{i+1}} = \\ &= f \sum_{i=1}^N \left(v_{i+1} \frac{h}{2} + v_i \frac{h}{2} \right) = \frac{fh}{2} \sum_{i=1}^N (v_i + v_{i+1}) = \frac{fh}{2} \left(v_1 + v_{N+1} + 2 \sum_{i=2}^N v_i \right). \end{aligned}$$

Таким образом, имеем вектор нагрузок в случае постоянной функции f :

$$F^T = \left(\frac{fh}{2} \quad fh \quad \dots \quad fh \quad \frac{fh}{2} \right). \quad (6)$$

Так же были проведены расчеты для случая, когда $f = e^x$ и $f = \sin(x)$. Опуская вычисления, запишем результат: вектор нагрузок имеет вид

$$F^T = (f_1 \quad f_2 \quad \dots \quad f_N \quad f_{N+1}), \quad (7)$$

коэффициенты которого определяются по формулам для функции $f = e^x$:

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{e^{x_1}}{h}(e^h - h - 1) = \frac{1}{h}(e^h - h - 1), \\ f_{N+1} &= \frac{e^{x_{N+1}}}{h}(e^{-h} + h - 1) = \frac{e}{h}(e^{-h} + h - 1), \\ f_i &= \frac{e^{x_i}}{h}(e^{-h} + h - 1) + \frac{e^{x_i}}{h}(e^h - h - 1) = \frac{e^{x_i}}{h}(e^h + e^{-h} - 2) \quad (i = \overline{2, N}) \end{aligned} \quad (8)$$

и для функции $f = \sin(x)$:

$$\begin{aligned} f_1 &= \cos(x_1) + \frac{1}{h}(\sin(x_1 + h) - \sin(x_1)), \\ f_{N+1} &= -\cos(x_{N+1} + h) + 2\cos(x_{N+1}) - \frac{\sin(x_{N+1} + h) - \sin(x_{N+1})}{h}, \\ f_i &= -\cos(x_{i+1}) \left(\frac{x_i - x_i + 1}{h} \right) + \cos(x_i) \left(2 + \frac{x_i - x_i + 1}{h} \right) \quad (i = \overline{2, N}). \end{aligned} \quad (9)$$

После всех выполненных операций получаем квадратичную форму

$$I(v) = \frac{1}{2}(Av, v) - (F, v) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N+1} \sum_{j=1}^{N+1} A_{ij} v_i v_j - \sum_{i=1}^{N+1} F_i v_i, \quad (10)$$

где матрица жесткости A определяется по формуле (5), вектор нагрузок F – соотношениями (6) или (7).

Аппроксимация допустимого множества будет выглядеть следующим образом:

$$K_h = \{v \in R^{N+1} : v_i \geq \psi(x_i)\}. \quad (11)$$

Окончательно получаем следующую конечномерную задачу

$$\begin{cases} I(v) = \frac{1}{2}(Av, v) - (F, v) \rightarrow \min, \\ v \in K_h. \end{cases} \quad (12)$$

Чтобы получить формулы для численных расчетов, нужно найти частные производные функционала $I(v)$ по v_i и приравнять их к нулю:

$$\begin{aligned} \frac{\partial I(v)}{\partial v_i} &= \sum_{j=1}^{N+1} A_{ij} v_j - F_i, \quad i = \overline{1, N+1}, \\ \sum_{j=1}^{N+1} A_{ij} v_j &= F_i, \quad i = \overline{1, N+1}. \end{aligned}$$

Последнее выражение представляет собой систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных v_i . Разрешать ее следует методом Зейделя:

$$v_i^{n+1} = -\frac{1}{A_{ii}} \left(\sum_{j<i} A_{ij} v_j^{n+1} + \sum_{j>i} A_{ij} v_j^n - F_i \right), \quad i = \overline{1, N+1}. \quad (13)$$

Далее следует покомпонентно производить проецирование на допустимое множество.

Расчет по формуле (13) будет проводиться до выполнения критерия

$$\max_i |v_i^{n+1} - v_i^n| \leq 10^{-3} h. \quad (14)$$

Счет проводился на сетках с шагом $h = \frac{1}{N}$, где N – число отрезков, на которые делится

расчетная область.

Для расчета использовались следующие функции:

$$f_1 = C, \quad f_2 = e^x, \quad f_3 = \sin(x),$$

$$\psi_1 = 2x(1-x) - 0.1, \quad \psi_2 = x \sin^2(10\pi x) - 0.1, \quad \psi_3 = (\sin 5\pi x)(\cos 3\pi x) - 0.1,$$

а также параметр шага. Результаты представлены в табл. 1, 2 и 3.

Функция $f_1 = C$ была взята с каждой из трех функций препятствия. Результаты представлены в табл. 1.

Таблица 1

Число итераций при решении одномерной задачи с препятствием

Функция, f	Препятствие, ψ	Число итераций, $h = 1/70$	Число итераций, $h = 1/40$
f_1	ψ_1	567	247
f_1	ψ_2	1921	710
f_1	ψ_3	1530	568

На рис. 1 представлены графики решения задачи с препятствием в одномерном случае с шагом $h = 1/70$.

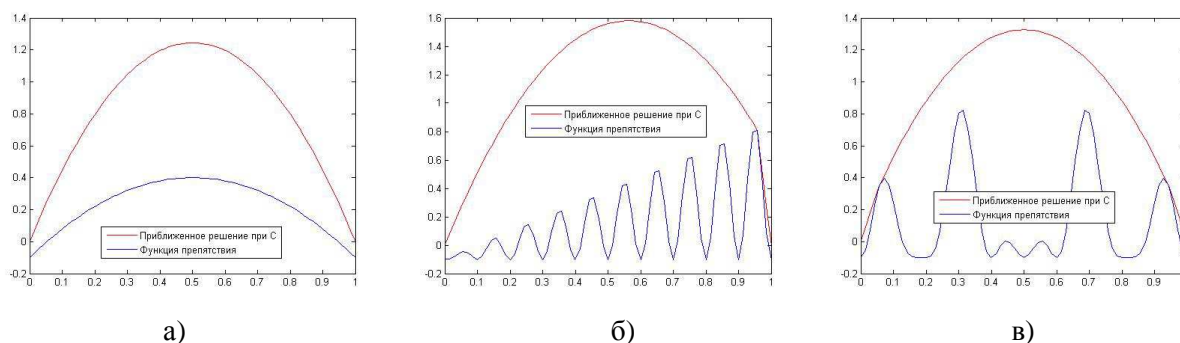


Рис. 1. Графики решения задачи с препятствием с функцией f_1 с шагом $h = 1/70$ (а – решение с препятствием ψ_1 ; б – решение с препятствием ψ_2 ; в – решение с препятствием ψ_3).

Следующим шагом было вычисление числа итераций для функции $f_2 = e^x$. Данная функция также была взята с каждой из трех функций препятствия. Результаты приведены в табл. 2.

Таблица 2

Число итераций при решении одномерной задачи с препятствием

Функция, f	Препятствие, ψ	Число итераций, $h = 1/70$	Число итераций, $h = 1/40$
f_2	ψ_1	1059	354
f_2	ψ_2	2016	724
f_2	ψ_3	409	166

На рис. 2 представлены графики решения задачи с препятствием в одномерном случае с функцией f_2 с шагом $h = 1/70$.

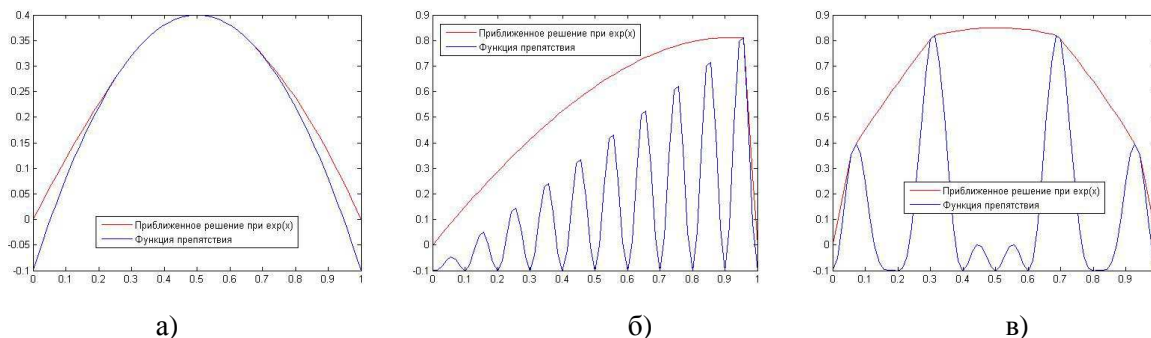


Рис. 2. Графики решения задачи с препятствием с функцией f_2 с шагом $h = 1/70$

(а – решение с препятствием ψ_1 ; б – решение с препятствием ψ_2 ; в – решение с препятствием ψ_3).

Аналогичные действия были проведены и для функции $f_3 = \sin(x)$. Как и в предыдущих экспериментах, функция была взята с каждой из трех функций препятствия. Результаты приведены в табл. 3.

Таблица 3

Число итераций при решении одномерной задачи с препятствием

Функция, f	Препятствие, ψ	Число итераций, $h = 1/70$	Число итераций, $h = 1/40$
f_3	ψ_1	757	250
f_3	ψ_2	2122	759
f_3	ψ_3	396	162

На рис. 3 представлены графики решения задачи с препятствием в одномерном случае с функцией f_3 шагом $h = 1/70$.

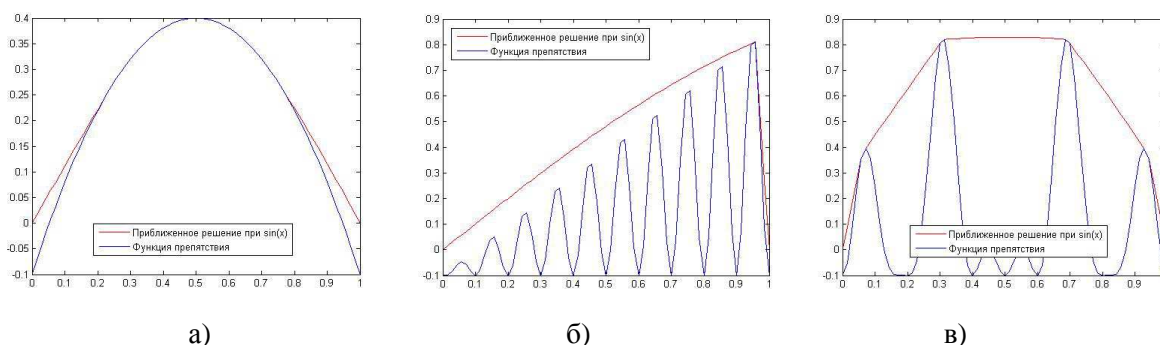


Рис. 3. Графики решения задачи с препятствием с функцией f_3 с шагом $h = 1/70$

(а – решение с препятствием ψ_1 ; б – решение с препятствием ψ_2 ; в – решение с препятствием ψ_3).

Выходными данными для всех трех функций является число итераций с варьируемым шагом.

Для сравнения результатов были взяты те же функции, но с отрицательным знаком, т.е. для расчета использовались значения $-f_1 = -C$, $-f_2 = -e^x$, $-f_3 = -\sin(x)$. Результаты приведены в табл. 4-6 и на рис. 4-6.

Таблица 4

Число итераций при решении одномерной задачи с препятствием

Функция, f	Препятствие, ψ	Число итераций, $h = 1/70$	Число итераций, $h = 1/40$
$-f_1$	ψ_1	567	247
$-f_1$	ψ_2	1921	710
$-f_1$	ψ_3	1530	568

Таблица 5

Число итераций при решении одномерной задачи с препятствием

Функция, f	Препятствие, ψ	Число итераций, $h = 1/70$	Число итераций, $h = 1/40$
$-f_2$	ψ_1	757	250
$-f_2$	ψ_2	2122	759
$-f_2$	ψ_3	396	162

Таблица 6

Число итераций при решении одномерной задачи с препятствием

Функция, f	Препятствие, ψ	Число итераций, $h = 1/70$	Число итераций, $h = 1/40$
$-f_3$	ψ_1	757	250
$-f_3$	ψ_2	2122	759
$-f_3$	ψ_3	396	162

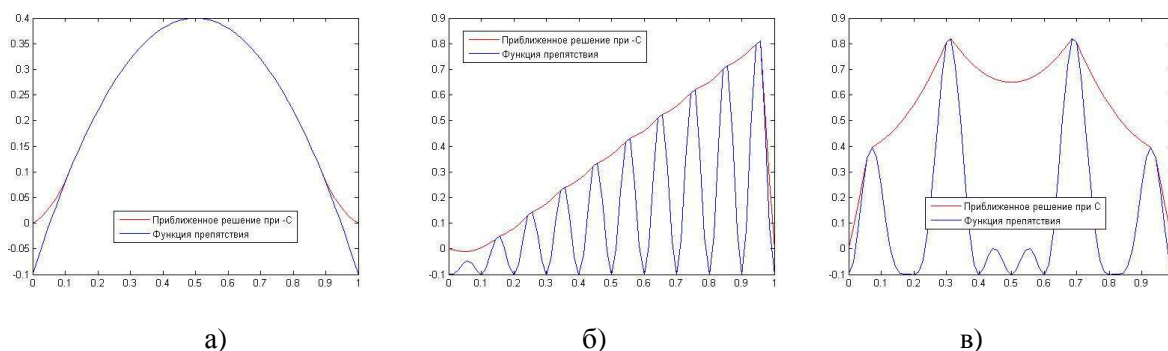


Рис. 4. Графики решения задачи с препятствием с функцией $(-f_1)$ с шагом $h=1/70$ (а – решение с препятствием ψ_1 ; б – решение с препятствием ψ_2 ; в – решение с препятствием ψ_3).

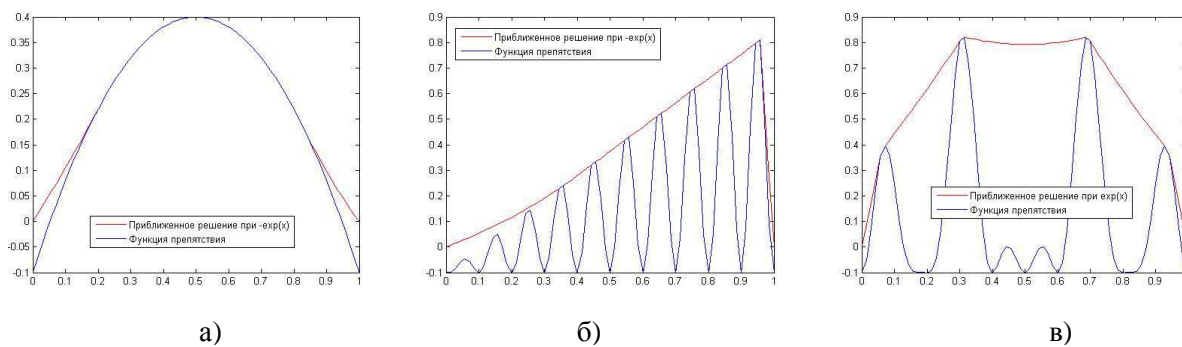
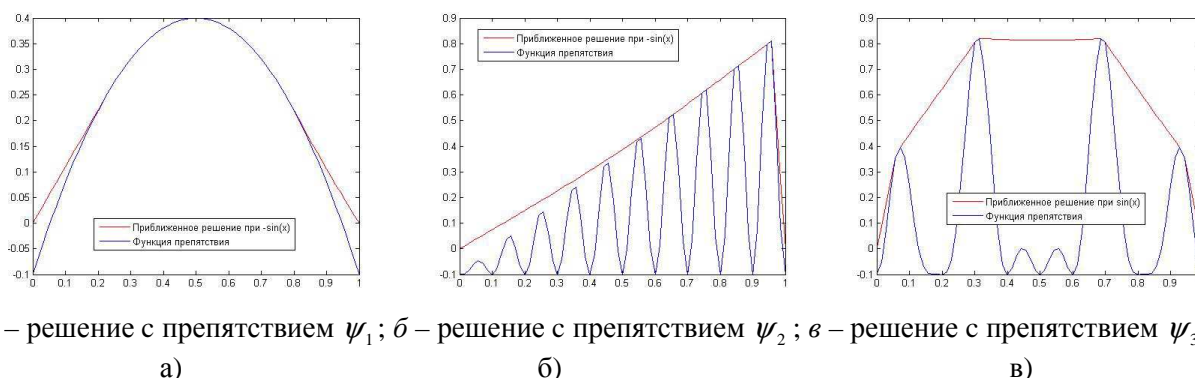


Рис. 5. Графики решения задачи с препятствием с функцией $(-f_2)$ с шагом $h=1/70$



(а – решение с препятствием ψ_1 ; б – решение с препятствием ψ_2 ; в – решение с препятствием ψ_3).

Рис. 6. Графики решения задачи с препятствием с функцией $(-f_3)$ с шагом $h=1/70$

(a – решение с препятствием ψ_1 ; b – решение с препятствием ψ_2 ; v – решение с препятствием ψ_3).

-
1. Гюнтер, Н.М. Курс вариационного исчисления. – СПб.: Лань, 2009. – 320 с.
 2. Гловински, Р. Численное исследование вариационных неравенств / Р. Гловински, Ж.-Л. Лионс, Р. Тремольер. – М.: Мир, 1979. – 574 с.
 3. Хлуднев, А.М. Задачи теории упругости в негладких областях. – М.: Физматлит, 2010. – 252 с.
 4. Колмогоров, А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. – М.: Наука, 1976. – 543 с.
 5. Игнатьева, М.А. Итерационные методы решения линейных и нелинейных сеточных задач: Приложения к задачам со свободной границей / сост. А.М. Елизарова. – Казань: Наука, 1999. – 255 с.
 6. Вержбицкий, В.М. Численные методы. Математический анализ и обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Высшая школа, 2001. – 382 с.
 7. Формалев, В.Ф. Численные методы / В.Ф. Формалев, Д.Л. Ревизников. – М.: Физматлит, 2006. – 400 с.