УДК 514.13

А.П. Филимонова, Т.А. Юрьева

СВОЙСТВО ВЫПУКЛОСТИ ФУНКЦИИ ВНЕШНЕЙ КРИВИЗНЫ ПОВЕРХНОСТИ В ТРЕХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ ЛОБАЧЕВСКОГО

В статье рассматривается задача о восстановлении регулярной выпуклой поверхности по функции ее внешней кривизны в трехмерном пространстве Лобачевского. Доказывается возможность применения процесса получения априорных оценок вторых производных решения соответствующего эллиптического уравнения Монжа-Ампера.

Ключевые слова: внешняя кривизна, модель Бельтрами-Клейна, априорные оценки решения уравнения, первая квадратичная форма, выпуклая функция.

CONVEXITY PROPERTY OF EXTRINSIC CURVATURE OF SURFACE IN THREE-DIMENSIONAL LOBACHEVSKY SPACE

The article is devoted to the problem of reconstructuring a regular convex surface by the functions of its extrinsic curvature in three-dimensional Lobachevsky space. It is proved the possibility to apply the process of prior estimate production of the secondary derivatives of the solution in the respective elliptical Monge-Ampere equation.

Key words: extrinsic curvature, Beltrami-Klein model, prior estimates of equation solution, first quadric quantic, convex function.

Современная дифференциальная геометрия включает большой класс задач, тесно связанных с задачами дифференциальных уравнений в частных производных.В частности, к указанному классу относятся задачи восстановления поверхностей с заданными геометрическими характеристиками.

Одной из важнейших геометрических характеристик поверхности является ее внешняя кривизна K_{ext}. Задача восстановления поверхности по ее внешней кривизне в том или ином объемлющем пространстве в аналитическом плане приводит к исследованию уравнения Монжа-Ампера [1] на некотором многообразии.

Цель нашей работы – рассмотрение задачи о восстановлении регулярной выпуклой поверхности F: $z=z(x, y)$, $(x, y) \in \overline{\Omega}$ ($\overline{\Omega}$ − замкнутый круг в плоскости $z=0$) по функции ее внешней кривизны K_{ext} в трехмерном гиперболическом пространстве H^3, вывод соответствующего эллиптического уравнения Монжа-Ампера и доказательство того факта, что к данному уравнению применим процесс получения априорных оценок вторых производных его решения.

Основным условием применимости указанного процесса является установление выпуклости функции $\varphi(x, y, z, z_x, z_y)$, определяющей K_{ext} по p и q ($p=z_x$, $q=z_y$).

Воспользуемся моделью Бельтрами-Клейна гиперболического пространства (пространства Лобачевского) H^3. Для этого отобразим H^3геодезически в открытый единичный шар пространства E^3 с центром в точкеO, в котором введена декартова система координат. Координаты x, y, z для точек H^3 называются бельтрамиевыми и удовлетворяют условию $x^2+y^2+z^2<1$.

Линейный элемент пространства H^3 в бельтрамиевых координатах имеет вид:

$$ds^2 = \frac{\left(xdx + ydy + zdz\right)^2 + \left(1 - x^2 - y^2 - z^2\right)\left(dx^2 + dy^2 + dz^2\right)}{\left(1 - x^2 - y^2 - z^2\right)^2}.$$

Коэффициенты $g_{ij}(ij=\overline{1,3})$ ds^2 пространства H^3 определяются:

$$g_{11} = \frac{x^2 + \left(1 - x^2 - y^2 - z^2\right)}{\left(1 - x^2 - y^2 - z^2\right)^2} = \frac{1 - y^2 - z^2}{\left(1 - x^2 - y^2 - z^2\right)^2},$$

$$g_{22} = \frac{y^2 + \left(1 - x^2 - y^2 - z^2\right)}{\left(1 - x^2 - y^2 - z^2\right)^2} = \frac{1 - x^2 - z^2}{\left(1 - x^2 - y^2 - z^2\right)^2},$$

$$g_{33} = \frac{z^2 + \left(1 - x^2 - y^2 - z^2\right)}{\left(1 - x^2 - y^2 - z^2\right)^2} = \frac{1 - x^2 - y^2}{\left(1 - x^2 - y^2 - z^2\right)^2},$$

$$g_{12} = g_{21} = \frac{xy}{\left(1 - x^2 - y^2 - z^2\right)^2},$$

$$g_{13} = g_{31} = \frac{xz}{\left(1 - x^2 - y^2 - z^2\right)^2},$$

$$g_{23} = g_{32} = \frac{yz}{\left(1 - x^2 - y^2 - z^2\right)^2}.$$

Известно, что ds^2 пространства H^3 индуцирует первую квадратичную форму поверхности в этом пространстве, коэффициенты которой G_{kl}связаны с g_{ij} соотношением:

$$G_{kl} = \sum_{i,j=1}^{3} g_{ij} \frac{\partial f_i}{\partial u_k} \frac{\partial f_j}{\partial u_l},\ u_1=x,\ u_2=y,\ f_1=x,\ f_2=y,\ f_3=z(x, y);\ k, l \in \{1, 2\}.$$

Тогда $E = G_{11} = g_{11}\frac{\partial x}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x} + 2g_{12}\frac{\partial x}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial x} + g_{22}\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial x} + 2g_{23}\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial x} + 2g_{13}\frac{\partial x}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial x} + g_{33}\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial x} =$

$$= g_{11} + 2g_{13}z_x + g_{33}z_x^2 = g_{11} + 2g_{13}p + g_{33}p^2 =$$

$$= \frac{1 - y^2 - z^2}{\left(1 - x^2 - y^2 - z^2\right)^2} + 2\frac{xzp}{\left(1 - x^2 - y^2 - z^2\right)^2} + \frac{1 - x^2 - y^2}{\left(1 - x^2 - y^2 - z^2\right)^2} \cdot p^2 =$$

$$= \frac{1 - y^2 - z^2 + 2xzp + (1 - x^2 - y^2)p^2}{\left(1 - x^2 - y^2 - z^2\right)^2} =$$

$$= \frac{1 - y^2 - z^2 - x^2 + x^2 + 2xzp + (1 - x^2 - y^2 - z^2)p^2 + z^2p^2}{\left(1 - x^2 - y^2 - z^2\right)^2} =$$

$$= \frac{\left(x + zp\right)^2 + 2xzp + (1 - x^2 - y^2 - z^2)(1 + p^2)}{\left(1 - x^2 - y^2 - z^2\right)^2}.$$

Аналогично: $G = G_{22} = \dfrac{\left(y + zq\right)^2 + 2xzp + (1 - x^2 - y^2 - z^2)(1 + q^2)}{\left(1 - x^2 - y^2 - z^2\right)^2},$

$$F = G_{12} = G_{21} = \frac{(x+zp)(y+zq)+(1-x^2-y^2-z^2)pq}{\left(1-x^2-y^2-z^2\right)^2}.$$

Известно, что коэффициенты второй квадратичной формы поверхности F: $z=z(x, y)$ в бельтрамиевых координатах вычисляются по формулам [2]:

$$L = \frac{r}{\left(1-x^2-y^2-z^2\right)^2 H},\ M = \frac{s}{\left(1-x^2-y^2-z^2\right)^2 H},\ N = \frac{t}{\left(1-x^2-y^2-z^2\right)^2 H},$$

где $r=z_{xx}$, $s=z_{xy}$, $t=z_{yy}$, $H^2=EG-F^2$.

Внешняя кривизна поверхности K_{ext} определяется как отношение: $K_{ext} = \dfrac{LN-M^2}{EG-F^2}$.

Из этой формулы путем преобразований получаем:

$$rt - s^2 = K_{ext}(x,y,z)\frac{\left[\left(1+p^2+q^2\right)-\left(px+qy-z\right)^2\right]}{\left(1-x^2-y^2-z^2\right)^2},$$

$$H^2 = EG - F^2 = \frac{\left(1+p^2+q^2\right)-\left(px+qy-z\right)^2}{\left(1-x^2-y^2-z^2\right)^3},\ p=z_x,\ q=z_y,\ r=z_{xx},\ s=z_{xy},\ t=z_{yy}.$$

Обозначим $K_{ext}(x,y,z)\dfrac{\left[\left(1+p^2+q^2\right)-\left(px+qy-z\right)^2\right]}{\left(1-x^2-y^2-z^2\right)^2}$ через $\varphi(x, y, z, p, q)$.

Тогда имеем простейшее уравнение Монжа-Ампера $rt - s^2 = \varphi(x, y, z, p, q)$, условием эллиптичности которого является $K_{ext}>0$, что всегда выполняется в классе выпуклых поверхностей. Решением этого уравнения является функция $z=z(x, y)$ с заданной внешней кривизной $K_{ext}(x, y, z)$.

Процесс нахождение априорных оценок решения указанного уравнения $rt - s^2 = \varphi(x, y, z, p, q)$ можно осуществить, если $\varphi(x, y, z, p, q)$ удовлетворяет некоторым условиям. Основное из этих условий – выпуклость $\varphi(x, y, z, p, q)$ по переменным p и q.

Функция $\varphi(x, y, z, p, q)$ называется выпуклой по переменным p и q, если для любых действительных чисел α и β имеет место неравенство:

$$\varphi_{pp}\alpha^2 + 2\varphi_{pq}\alpha\beta + \varphi_{qq}\beta^2 \ge c(z,p,q)\cdot\left(\alpha^2+\beta^2\right),$$

где $c(z,p,q)$ является положительной и непрерывной по всем аргументам функцией.

Будем предполагать, что K_{ext} непрерывна по x, y, z, где $(x,y)\in\overline{\Omega}, z\in[z_1,z_2]$. В силу непрерывности $K_{ext}(x, y, z)$ достигает наименьшего значения $K_0>0$ на компакте $\overline{\Omega}\times[z_1,z_2]$.

Обозначим числитель второго сомножителя в функции φ через A и дважды продифференцируем по p и q.

Имеем: $A_p = 2\left[\left(1+p^2+q^2\right)-\left(px+qy-z\right)^2\right]\cdot\left(2p-2(px+py-z)x\right) =$

$$= 4\left[\left(1+p^2+q^2\right)-\left(px+qy-z\right)^2\right]\cdot\left(p-(px+py-z)x\right),$$

$$A_{pp} = 4\left\{\left[\left(2p-2(px+py-z)x\right]\cdot\left(p-(px+py-z)x\right)+\right.$$

$$\left.+\left[\left(1+p^2+q^2\right)-\left(px+qy-z\right)^2\right]\cdot\left(1-x^2\right)\right\} =$$

$$= 4\left\{H^2(1-x^2-y^2-z^2)^3(1-x^2)+2\cdot\left[p-x(px+py-z)\right]^2\right\}.$$

Аналогично:

$$A_{qq} = 4\left\{H^2(1-x^2-y^2-z^2)^3(1-y^2)+2\cdot\left[q-y(px+py-z)\right]^2\right\},$$

$$A_{pq} = 4[2pq-2py(px+qy-z)-2qx(px+qy-z)-$$

$$-(1+p^2+q^2)xy+(px+qy-z)^2xy].$$

Отсюда

$$\varphi_{pp}\alpha^2+2\varphi_{pq}\alpha\beta+\varphi_{qq}\beta^2 = \frac{4K_{ext}}{(1-x^2-y^2-z^2)^2}\cdot\{[(1+p^2+q^2)-(px+qy-z)^2]\times$$

$$\times[(1-x^2)\alpha^2-2xy\alpha\beta+(1-y^2)\beta^2]+2[(p-x(px+py-z))\alpha+(q-y(px+py-z))\beta]^2\}\geq$$

$$\frac{4K_{ext}}{(1-x^2-y^2-z^2)^2}\cdot\{[(1+p^2+q^2)-(px+qy-z)^2]\times[(1-x^2)\alpha^2-2xy\alpha\beta+(1-y^2)\beta^2\}.$$

Далее: $(1-x^2)\alpha^2-2xy\alpha\beta+(1-y^2)\beta^2\geq(y^2+z^2)\alpha^2-2xy\alpha\beta+(x^2+z^2)\beta^2 =$ $= z^2(\alpha^2+\beta^2)+(y\alpha-x\beta)^2\geq z^2(\alpha^2+\beta^2).$ Так как бельтрамиевы координаты x, y, z удовлетворяют неравенству $x^2+y^2+z^2<1$, следовательно, $1-x^2>y^2+z^2$, $1-y^2>x^2+z^2$.

Выражения $(1-x^2-y^2-z^2)$ и $[(1+p^2+q^2)-(px+qy-z)^2]$ можно истолковать геометрически: обозначим через d_1 расстояние от точки O до точки (x, y, z) поверхности, а через d – расстояние от точки O до касательной плоскости к поверхности в точке (x, y, z). Тогда

$\frac{[(1+p^2+q^2)-(px+qy-z)^2]}{(1-x^2-y^2-z^2)^2} = (1+p^2+q^2)\cdot\frac{1-d^2}{(1-d_1^2)^2}$. Ясно, что $\frac{1-d^2}{1-d_1^2}>1$, поэтому

$$\varphi_{pp}\alpha^2+2\varphi_{pq}\alpha\beta+\varphi_{qq}\beta^2\geq 4K_0z^2(1+p^2+q^2)\cdot\frac{1-d^2}{(1-d_1^2)^2}\cdot(\alpha^2+\beta^2).$$

Здесь $c(z,p,q) = 4K_0z^2(1+p^2+q^2)\cdot\frac{1-d^2}{(1-d_1^2)^2}$ – положительная и непрерывная по всем аргументам функция.

Таким образом, функция φ обладает свойством выпуклости по p и q, а значит применим метод получения априорных оценок вторых производных уравнения $rt-s^2=\varphi(x, y, z, p, q)$.

---

1. Погорелов, А.В. Внешняя геометрия выпуклых поверхностей. – М.: Наука, 1969. – 760 с.
2. Трайнин, Я.Л. Аналитическая геометрия в пространстве Лобачевского. – Новосибирск, 1974. – 285 с.