Математика. Прикладная математика

УДК 517.957

Е.М. Веселова

ЛИНЕЙНЫЙ АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ, ОПИСЫВАЮЩИХ ФИЗИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ

В статье изложены методы исследования устойчивости динамических систем, посредством которых описывают физические процессы воздействия излучения на вещество.

Приведен линейный анализ устойчивости динамической системы, заданной как одним, так и системой дифференциальных уравнений, в зависимости от количества переменных состояния системы.

Ключевые слова: сложная система, динамическая система, линейный анализ устойчивости.

LINEAR STABILITY ANALYSIS OF DYNAMIC SYSTEMS USED FOR DESCRIBING PHYSICAL PROCESSES

The article is devoted to methods of stability analysis of dynamic systems used for describing physical processes of radiation effects on a matter.

The linear stability analysis of a dynamic system was performed with a focus on problems specified by a differential equations as well as differential equation system subject to a different number of system state variables.

Key words: complex system, dynamic system, linear stability analysis.

Введение

Воздействие излучения на твердое тело приводит к сложным физическим процессам, происходящим в веществе, и к возникновению в нем различного рода радиационных дефектов, не имевшихся до взаимодействия. Изучение этих структурных изменений и изменений свойств твердых тел проводят при помощи методов качественной теории сложных систем.

Основной метод исследования сложных систем – математическое моделирование, для которого необходимо формализовать процессы ее функционирования и затем построить математическое описание сложной системы. Элементы сложной системы обычно описывают в виде динамических систем, при их изучении центральным моментов является исследование их устойчивости. Под устойчивостью динамической системы понимают ее реакцию на малые возмущения ее состояния. Линейный анализ устойчивости позволяет предсказать, при каких значениях параметров состояния системы развивается ее неустойчивость [1].

Математическое описание

Динамическая система может задаваться как одним, так и системой дифференциальных уравнений, в зависимости от количества переменных состояния системы, при этом линейный анализ устойчивости будет несколько различен.

В первом случае типичной моделью динамической системы может являться обыкновенное дифференциальное уравнение [1, 2]

$$\frac{dx(t)}{dt} = \dot{x} = F(x, \mu), \tag{1}$$

где $x(t)$ – переменная состояния; F – функция состояния, характеризующая закон эволюции; μ – параметр системы.

Согласно определению динамической системы, если задано начальное состояние $x(t_0) = x_0$, то существует единственное решение уравнения (1), которое предсказывает будущее состояние $x(t)$ для любых $t > t_0$.

Пусть имеется некоторое частное решение $x^0(t)$ уравнения (1). Исследуем его на устойчивость. Малое отклонение от частного решения задается переменной

$$y(t) = x(t) - x^0(t), \tag{2}$$

здесь $x(t)$ – возмущенное решение.

Задача состоит в исследовании эволюции во времени малого возмущения $y(t)$, которое подчиняется уравнению (1). Для этого функция F раскладывается в степенной ряд в окрестности частного решения $x^0(t)$:

$$F(y) = \left.\frac{dF}{dx}\right|_{x=x^0(t)} \cdot y(t) + \left.\frac{d^2F}{dx^2}\right|_{x=x^0(t)} \cdot y^2(t) + \dots \tag{3}$$

Уравнение (1) для возмущения $y(t)$ с учетом (3) будет иметь вид

$$\dot{y}(t) = F(y, \mu) = \left.\frac{dF}{dx}\right|_{x=x^0(t)} \cdot y(t) + \Phi(y), \tag{4}$$

где

$$\Phi(y) = \left.\frac{d^2F}{dx^2}\right|_{x=x^0(t)} \cdot y^2(t) + \dots \tag{5}$$

Слагаемые $\Phi(y)$ включает все члены с $y^n\,(n \geq 2)$, т.е. учитывает нелинейные добавки. По определению, переменная $y(t)$ есть малое отклонение от частного решения, а значит, нелинейными слагаемыми в уравнении (4) в первом приближении можно пренебречь.

Тогда для эволюции малого возмущения линейное уравнение имеет вид

$$\dot{y} = A(t)\,y, \tag{6}$$

где

$$A(t) = \left.\frac{dF}{dx}\right|_{x=x^0(t)}. \tag{7}$$

Так, например, пусть динамическая система задана уравнением

$$\dot{x} = a - bx^2,\ a > 0,\ b > 0, \tag{8}$$

Исследуем ее стационарные состояния на устойчивость. В стационарном состоянии изменений во времени нет, а это означает, что $\dot{x} = 0$, а отсюда имеем:

$$x_{1,2}^0 = \pm\sqrt{\frac{a}{b}}. \tag{9}$$

Уравнение для возмущений (6) применительно к первому стационарному состоянию x_1^0 будет иметь вид

$$\dot{y} = -\left(2bx_1^0\right)y = \left(-2\sqrt{ab}\right)y = \lambda y, \tag{10}$$

$$\lambda = \left.\frac{dF}{dx}\right|_{x_0^1}. \tag{11}$$

Решением уравнения (10) будет $y = \exp(\lambda t)$. Возмущение y экспоненциально затухает во времени, так как коэффициент λ есть отрицательное число, а значит, состояние x_1^0 устойчиво. Второе состояние x_2^0 отличается от первого только знаком, поэтому решение уравнения (10) будет экспоненциально нарастающим во времени, а стационарное состояние x_2^0 неустойчивым.

В случае, когда динамическая система имеет n переменных состояния, она может задаваться системой уравнений вида

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i\left(x_1, x_2, ..., x_n\right),\ i = 1,\ 2,\ ...\ , n, \tag{12}$$

Возмущенное решение данной системы при условии, что частным ее решением является $x_0 = \left(x_{01}, x_{02}, \ldots, x_{0n}\right)$, будет иметь вид

$$y = x - x_0. \tag{13}$$

Тогда y запишется в виде

$$\dot{y} = \mathrm{A}\,y, \tag{14}$$

где A – постоянная матрица,

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}_{x=x_0}, \qquad \mathrm{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix} \tag{15}$$

Если искать решение уравнения (14) в виде

$$y = y_0 \exp(\lambda t), \tag{16}$$

то подстановка такого решения в (14) приведет нас к системе линейных уравнений для коэффициентов $y_0 = \left(y_{01}, y_{02}, \ldots, y_{0n}\right)$. Условие разрешимости этой системы дает характеристическое уравнение

$$\det\left(\mathrm{A} - \lambda\,\mathrm{E}\right) = 0, \tag{17}$$

представляющее собой уравнение n-й степени относительно показателя λ. Это уравнение имеет n корней, среди которых могут быть как действительные, так и комплексные. Если записать корни уравнения (17) в виде $\lambda_i = \mathrm{Re}\,\lambda_i + i\,\mathrm{Im}\,\lambda_i$, то все корни, расположенные в левой полуплоскости комплексной плоскости λ, где $\mathrm{Re}\,\lambda < 0$, будут соответствовать устойчивым состояниям, так как возмущение $y_i = x_i - x_{0i} \sim \exp(t\,\mathrm{Re}\,\lambda)$ будет затухать со временем, а корни, расположенные в правой полуплоскости, отвечают неустойчивым состояниям.

Заключение

Проведенные исследования расширяют представления о процессах, протекающих в твердых телах в результате облучения, и дают возможность описания этих процессов с использованием математического аппарата.

---

1. Анищенко, В.С. Динамические системы // Соросовский образовательный журнал. – 1997. – № 11.– С. 77-84.
2. Ванина, Е.А. Упорядочение радиационных дефектов в неорганических системах: Монография / Е.А. Ванина, Е.М. Веселова, В.А. Рокосей. – Благовещенск: Изд-во АмГУ, 2014. – 116 с.