

# М а т е м а т и к а . П р и к л а д н а я м а т е м а т и к а . М е х а н и к а

УДК 519.853.2 + 519.632

Н.Н. Максимова

## ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ИТЕРАТИВНОЙ ПРОКСИМАЛЬНОЙ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ДВУХ ПОЛУКОЭРЦИТИВНЫХ ВАРИАЦИОННЫХ ЗАДАЧ

*В статье проводится численное исследование двух полукоэрцитивных вариационных задач в одномерной постановке с применением метода итеративной проксимальной регуляризации. Реализация алгоритма производится при конечно-элементной аппроксимации вариационных задач. Алгоритм реализован в ППП Matlab 2010.*

*Ключевые слова: задача упругопластического кручения цилиндрического стержня, задача с препятствием, метод итеративной проксимальной регуляризации, метод конечных элементов.*

## APPLICATION OF THE INTERACTIVE PROXIMAL REGULARIZATION METHOD FOR STUDY TWO SEMICOERCIVE VARIATIONAL PROBLEMS

*In this paper a numerical study of two semicoercive variational problems in one-dimensional setting is conducted by the iterative proximal regularization method. The implementation of the algorithm is performed with the finite element approximation of variational problems. The algorithm is implemented in Matlab SPT 2010.*

*Key words: Elastic-plastic Torsion Problem of a Cylindrical Rod, Problem with Prep-Action, the Iterative Proximal Regularization Method, Finite Element Method.*

### Введение

Большое количество задач математической физики механики допускает естественную вариационную постановку. Суть такой постановки состоит в отыскании экстремума некоторого функционала энергии, т.е. в решении экстремальной задачи. Экстремальная задача позволяет применить для ее решения эффективные оптимизационные алгоритмы.

Как правило, исследование таких задач проводится с использованием метода конечных элементов [1]. Большой вклад в данный вопрос вносит работа французских математиков [2], в которой подробно исследуется применение метода конечных элементов для аппроксимации непрерывных задач и исследуются методы решения конечномерных аналогов.

При конечно-элементной аппроксимации задачи получается квадратичный функционал с вырожденной матрицей, и при его минимизации возникают проблемы со сходимостью численных

алгоритмов. Вообще говоря, методы регуляризации могут быть использованы для задач минимизации, когда неточно заданы либо целевая функция, либо допустимое множество; данный подход достаточно хорошо развит в работах А.С. Антипина и Ф.П. Васильева [3, 4]. Исходя из изученных работ, можно считать, что в настоящее время существуют два вида регуляризации – регуляризация по Тихонову [5, 6] и итеративная проксимальная регуляризация. Остановимся более подробно на втором виде регуляризации.

В работах начала 70-х гг. прошлого века впервые был использован итерационный процесс, заменяющий задачу конечномерной оптимизации последовательностью задач минимизации исходной целевой функции с проксимальной регуляризирующей добавкой. Главное преимущество этого вида регуляризации, в отличие от регуляризации по Тихонову, состоит в том, что нет необходимости устремлять параметр регуляризации к нулю, достаточно взять его равным какой-либо положительной постоянной (например, единице). В настоящее время итеративная проксимальная регуляризация широко используется для решения ряда некорректных задач.

Статья продолжает работы [7], [8], в которых исследованы две полукоэрцитивные вариационные задачи: задача упругопластического кручения цилиндрического стержня и задача с препятствием – в одномерных постановках с применением метода конечных элементов. В данной работе указанные задачи исследуются с применением метода итеративной проксимальной регуляризации. Реализация алгоритма производится при конечно-элементной аппроксимации вариационных задач.

### Постановка задач

Задача упругопластического кручения цилиндрического стержня в одномерной постановке имеет следующий вид [7]:

$$\begin{cases} J(v) = \frac{1}{2} \int_0^1 v^2 dx - \int_0^1 f v dx \rightarrow \min, \\ v \in K_1 = \left\{ v \in W_2^1(0, 1), 0 \leq v(x) \leq \delta(x, \Gamma) \text{ п. в. в } (0, 1) \right\}. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь функция  $f$  – это воздействие, прилагаемое к стержню, изготовленного из упругопластического материала, подчиняющегося критерию Мизеса.

Нетрудно проверить, что частное решение задачи при  $f = C = const > 0$  задается формулой [2], [7]:

$$v^*(x) = \frac{C}{2} x(1-x), \text{ если } C < 2,$$

а при  $C \geq 2$  – формулой

$$v^*(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{C}, \\ \frac{C}{2} \left[ x(1-x) - \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{C} \right)^2 \right], & \frac{1}{2} - \frac{1}{C} \leq x \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{C}, \\ 1-x, & \frac{1}{2} + \frac{1}{C} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

В одномерной постановке задача с препятствием представляет собой следующую вариационную задачу [8]:

$$\begin{cases} J(v) = \frac{1}{2} \int_0^1 v'^2 dx - \int_0^1 f v dx \rightarrow \min, \\ v \in K_2 = \left\{ v \in \overset{\circ}{W}_2^1(0, 1), v(x) \geq \psi(x) \text{ п. в. в } (0, 1) \right\}. \end{cases} \quad (2)$$

Здесь функция  $f$  – это «вертикальная» сила плотности, действующая на тонкую упругую мембрану, прогибы которой ограничены «снизу» жестким препятствием, описываемым функцией препятствия  $\psi$ .

Функционал в задачах (1), (2) является полукоэрцитивным, поскольку ядро билинейной формы  $a(u, v) = \int_0^1 u' v' dx$  не вырождено (состоит из функций-констант).

### Итеративная проксимальная регуляризация функционалов

Алгоритм итеративной проксимальной регуляризации можно описать следующей схемой: определим некоторое начальное приближение к решению  $v^0$  и на каждом шаге – функцию  $v^{k+1}$  как решение задачи

$$\begin{cases} J(v) + \alpha \|v - v^k\|_{L_2(\Omega)}^2 \rightarrow \min, \\ v \in K. \end{cases}$$

При этом  $\alpha$  может принимать любое положительное значение и не обязательно стремиться к нулю.

В качестве начального приближения  $v^0$  можно выбирать некоторую функцию, – например,  $v^0 \equiv 0$ . На каждом шаге итерационного процесса каждое следующее приближение к решению находится по методу конечных элементов. Критерием остановки процесса служит близость двух соседних приближений с некоторой заданной точностью.

Рассмотрим функционал с регуляризующей добавкой при  $\alpha = \frac{1}{2}$ :

$$\begin{aligned} J(v) + \frac{1}{2} \|v - v^k\|_{L_2(\Omega)}^2 &= \frac{1}{2} \int_0^1 v'^2 dx - \int_0^1 f v dx + \frac{1}{2} \int_0^1 (v - v^k)^2 dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 v'^2 dx - \int_0^1 f v dx + \frac{1}{2} \int_0^1 (v^2 - 2v v^k + (v^k)^2) dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 (v'^2 + v^2) dx - \frac{1}{2} \int_0^1 (f + v^k) v dx + \frac{1}{2} \int_0^1 (v^k)^2 dx. \end{aligned}$$

Так как  $\frac{1}{2} \int_0^1 (v^k)^2 dx$  – постоянная величина, то задача минимизации регуляризованного функционала эквивалентна следующей задаче:

$$\begin{cases} I(v) = \frac{1}{2} \int_0^1 (v'^2 + v^2) dx - \frac{1}{2} \int_0^1 (f + v^k) v dx \rightarrow \min, \\ v \in K. \end{cases} \quad (3)$$

Решение задачи (3) на каждом шаге итерационного процесса будем находить по методу конечных элементов.

### Конечно-элементная аппроксимация задач

Разобьем промежуток  $[0, 1]$  точками  $x_{i+1} = x_i + i \cdot h$  ( $i = \overline{0, N}$ ), где  $h = \frac{1}{N}$  – шаг аппроксимации. Решение будем искать в виде:

$$v_I = \sum_{i=1}^{N+1} v_i \varphi_i(x),$$

где базисные функции (кусочно-линейные) метода конечных элементов имеют вид:

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} 1 + \frac{x - x_i}{h}, & x \in [x_{i-1}, x_i], \\ 1 - \frac{x - x_i}{h}, & x \in [x_i, x_{i+1}]. \end{cases}$$

Аппроксимируем каждое слагаемое функционала в (3):

$$1) \int_0^1 v^2 dx = \frac{1}{h} \left( v_1^2 + v_{N+1}^2 + 2 \sum_{i=2}^N v_i^2 - 2 \sum_{i=1}^N v_i v_{i+1} \right)$$

(подробное описание представлено в [7], [8]);

$$\begin{aligned} 2) \int_0^1 v^2 dx &= \sum_{i=1}^N \int_{x_i}^{x_{i+1}} (v_i \varphi_i(x) + v_{i+1} \varphi_{i+1}(x))^2 dx = \\ &= \sum_{i=1}^N \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left( v_i \left( 1 + \frac{x - x_i}{h} \right) + v_{i+1} \left( 1 + \frac{x - x_{i+1}}{h} \right) \right)^2 dx = \\ &= \sum_{i=1}^N \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left( v_i^2 \left( 1 + \frac{x - x_i}{h} \right)^2 + 2v_i v_{i+1} \left( 1 + \frac{x - x_i}{h} \right) \left( 1 + \frac{x - x_{i+1}}{h} \right) + \right. \\ &\quad \left. + v_{i+1}^2 \left( 1 + \frac{x - x_{i+1}}{h} \right)^2 \right) dx = \\ &= \sum_{i=1}^N \left[ v_i^2 \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left( 1 + \frac{x - x_i}{h} \right)^2 dx + 2v_i v_{i+1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left( 1 + \frac{x - x_i}{h} \right) \left( 1 + \frac{x - x_{i+1}}{h} \right) dx + \right. \\ &\quad \left. + v_{i+1}^2 \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left( 1 + \frac{x - x_{i+1}}{h} \right)^2 dx \right], \\ \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left( 1 - \frac{x - x_i}{h} \right)^2 dx &= \frac{\left( 1 - \frac{x - x_{i+1}}{h} \right)^3}{3 \left( -\frac{1}{h} \right)} \Bigg|_{x_i}^{x_{i+1}} = -\frac{h}{3} \left( 1 - \frac{x - x_{i+1}}{h} \right)^3 \Bigg|_{x_i}^{x_{i+1}} = \\ &= -\frac{h}{3} \left[ \left( 1 - \frac{h}{h} \right)^3 - \left( 1 - \frac{0}{h} \right)^3 \right] = -\frac{h}{3} (-1) = \frac{h}{3}, \\ \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left( 1 + \frac{x - x_{i+1}}{h} \right)^2 dx &= \frac{\left( 1 + \frac{x - x_{i+1}}{h} \right)^3}{3 \left( \frac{1}{h} \right)} \Bigg|_{x_i}^{x_{i+1}} = \frac{h}{3} \left( 1 + \frac{x - x_{i+1}}{h} \right)^3 \Bigg|_{x_i}^{x_{i+1}} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{h}{3} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{h}{h} \right)^3 \right] = \frac{h}{3}, \\
&\int_{x_i}^{x_{i+1}} \left( 1 - \frac{x-x_i}{h} \right) \left( 1 + \frac{x-x_{i+1}}{h} \right) dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left( 1 - \frac{x-x_i}{h} \right) \left( 1 + \frac{x-x_i-h}{h} \right) dx = \\
&= \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left( 1 - \frac{x-x_i}{h} \right) \left( 1 + 1 - \frac{x-x_i}{h} - 1 \right) dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left( 1 - \frac{x-x_i}{h} \right) \left( \frac{x-x_i}{h} \right) dx = \\
&= \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left( \left( \frac{x-x_i}{h} \right) - \left( \frac{x-x_i}{h} \right)^2 \right) dx = \left[ \frac{\left( \frac{x-x_i}{h} \right)^2}{\frac{2}{h}} - \frac{\left( \frac{x-x_i}{h} \right)^3}{\frac{3}{h}} \right]_{x_i}^{x_{i+1}} = \\
&= \left[ \frac{h}{2} \left( \frac{x-x_i}{h} \right)^2 - \frac{h}{3} \left( \frac{x-x_i}{h} \right)^3 \right]_{x_i}^{x_{i+1}} = \left[ \frac{h}{2} 1^2 - \frac{h}{3} 1^3 \right] - 0 = \frac{h}{2} - \frac{h}{3} = \frac{h}{6}
\end{aligned}$$

Таким образом, имеем:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 v^2 dx &= \sum_{i=1}^N \left( v_i^2 \frac{h}{3} + 2v_i v_{i+1} \frac{h}{6} + v_{i+1}^2 \frac{h}{3} \right) = \frac{h}{3} \sum_{i=1}^N (v_i^2 + v_i v_{i+1} + v_{i+1}^2) = \\
&= \frac{h}{3} \left[ v_1^2 + v_{N+1}^2 + 2 \sum_{i=2}^N v_i^2 + \sum_{i=1}^N v_i v_{i+1} \right].
\end{aligned}$$

Из проделанных расчетов получаем:

$$\int_0^1 (v'^2 + v^2) dx = \left( \frac{1}{h} + \frac{h}{3} \right) v_1^2 + \left( \frac{1}{h} + \frac{h}{3} \right) v_{N+1}^2 + \left( \frac{2}{h} + \frac{2h}{3} \right) \sum_{i=1}^N v_i^2 + \left( -\frac{2}{h} + \frac{h}{3} \right) \sum_{i=1}^N v_i v_{i+1}.$$

Откуда записываем следующую матрицу жесткости:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{h} + \frac{h}{3} & -\frac{1}{h} + \frac{h}{6} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{h} + \frac{h}{6} & \frac{2}{h} + \frac{2h}{3} & -\frac{1}{h} + \frac{h}{6} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{h} + \frac{h}{6} & \frac{2}{h} + \frac{2h}{3} & -\frac{1}{h} + \frac{h}{6} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -\frac{1}{h} + \frac{h}{6} & \frac{2}{h} + \frac{2h}{3} & -\frac{1}{h} + \frac{h}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{h} + \frac{h}{6} & \frac{1}{h} + \frac{h}{3} \end{pmatrix}; \quad (4)$$

3) для получения вектора нагрузок вычислим интеграл

$$\int_0^1 (f + v^k) v dx = \int_0^1 f v dx + \int_0^1 v^k v dx,$$

который, очевидно, будет зависеть как от значений функции  $f$ , так и от приближенного решения на предыдущем итерационном шаге  $v^k = v_i^k = \sum_{i=1}^{N+1} v_i^k \varphi_i(x)$  (здесь  $v^k = (v_1^k, v_2^k, \dots, v_{N+1}^k)$  – известное решение, полученное на предыдущей итерации).

Вычисление первого интеграла  $\int_0^1 f v dx$  подробно описано в [7], [8]; в результате получаем

некоторый вектор  $(f_1 \ f_2 \ \dots \ f_N \ f_{N+1})$ . Подробно вычислим второй интеграл:

$$\begin{aligned} \int_0^1 v^k v dx &= \sum_{i=1}^N \int_{x_i}^{x_{i+1}} v^k v dx = \sum_{i=1}^N \int_{x_i}^{x_{i+1}} (v_i^k \varphi_i(x) + v_{i+1}^k \varphi_{i+1}(x)) (v_i \varphi_i(x) + v_{i+1} \varphi_{i+1}(x)) dx = \\ &= \sum_{i=1}^N \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left( v_i^k \left( 1 - \frac{x-x_i}{h} \right) + v_{i+1}^k \left( 1 + \frac{x-x_{i+1}}{h} \right) \right) \left( v_i \left( 1 - \frac{x-x_i}{h} \right) + v_{i+1} \left( 1 + \frac{x-x_{i+1}}{h} \right) \right) dx = \\ &= \sum_{i=1}^N \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left[ v_i^k \left( 1 - \frac{x-x_i}{h} \right)^2 v_i + v_i^k \left( 1 - \frac{x-x_i}{h} \right) \frac{x-x_i}{h} v_{i+1} + \right. \\ &+ v_{i+1}^k \frac{x-x_i}{h} \left( 1 - \frac{x-x_i}{h} \right) v_i + v_{i+1}^k \left( \frac{x-x_i}{h} \right)^2 v_{i+1} \left. \right] dx = \sum_{i=1}^N \left[ v_i^k \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left( 1 - \frac{x-x_i}{h} \right)^2 v_i + \right. \\ &+ v_{i+1}^k \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{x-x_i}{h} \left( 1 - \frac{x-x_i}{h} \right) dx v_i + v_i^k \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left( 1 - \frac{x-x_i}{h} \right) \frac{x-x_i}{h} dx v_{i+1} + \\ &+ v_{i+1}^k \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left( \frac{x-x_i}{h} \right)^2 dx v_{i+1} \left. \right]. \end{aligned}$$

Рассчитаем отдельно каждый из интегралов:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \left( 1 - \frac{x-x_i}{h} \right)^2 dx = \frac{h}{3}; \quad \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left( 1 - \frac{x-x_i}{h} \right) \frac{x-x_i}{h} dx = \frac{h}{6}; \quad \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left( \frac{x-x_i}{h} \right)^2 dx = \frac{h}{3}.$$

В итоге получим

$$\begin{aligned} \int_0^1 v^k v dx &= \sum_{i=1}^N \left[ \left( v_i^k \frac{h}{3} + v_{i+1}^k \frac{h}{6} \right) v_i + \left( v_i^k \frac{h}{3} + v_{i+1}^k \frac{h}{6} \right) v_{i+1} \right] = \\ &= \left( v_1^k \frac{h}{3} + v_2^k \frac{h}{6} \right) v_1 + \left( v_N^k \frac{h}{6} + v_{N+1}^k \frac{h}{3} \right) v_{N+1} + \sum_{i=2}^N \left( v_{i-1}^k \frac{h}{6} + v_i^k \frac{2h}{3} + v_{i+1}^k \frac{h}{6} \right) v_i. \end{aligned}$$

Окончательно получаем вектор нагрузок:

$$F = \begin{pmatrix} f_1 + v_1^k \frac{h}{3} + v_2^k \frac{h}{6} \\ \dots \\ f_i + v_{i-1}^k \frac{h}{6} + v_i^k \frac{2h}{3} + v_{i+1}^k \frac{h}{6} \\ \dots \\ f_{N+1} + v_N^k \frac{h}{6} + v_{N+1}^k \frac{h}{3} \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Далее получаем задачу минимизации квадратичной формы

$$\begin{cases} I_h(v) = (Av, v) - (F, v) \rightarrow \min, \\ v \in K_h, \end{cases}$$

где матрица жесткости рассчитывается по формуле (4), а вектор нагрузок – по формуле (5).

Аппроксимация допустимого множества в задаче упругопластического кручения имеет вид:

$$K_{1,h} = \{v \in R^{N+1} : 0 \leq v_i \leq \delta(x_i, \Gamma)\},$$

в задаче с препятствием –

$$K_{2,h} = \{v \in R^{N+1} : v_i \geq \psi(x_i)\}.$$

При организации вычислительного процесса будем различать два вида итераций: внешние ( $k$ ) и внутренние ( $n$ ). Внешние – это итерации проксимальной регуляризации. В качестве стартового вектора выбираем нулевой вектор. Счет по внешнему итерационному процессу будем проводить до выполнения критерия

$$\max_i |v_i^{k+1} - v_i^k| \leq 10^{-3}h.$$

На каждой внешней итерации организуем внутренний итерационный процесс. Это минимизация аппроксимированного функционала при фиксированном  $v^k$  по формуле

$$v_i^{n+1} = -\frac{1}{A_{ii}} \left( \sum_{j<i} A_{ij} v_j^{n+1} + \sum_{j>i} A_{ij} v_j^n - F_i \right), \quad \overline{i=1, N+1} \quad (6)$$

с одновременным покомпонентным проецированием на допустимое множество.

Расчет в таком случае будет проводиться до выполнения критерия

$$\max_i |v_i^{n+1} - v_i^n| \leq 10^{-3}h.$$

При этом следует отметить, что на первой внешней итерации в качестве стартового вектора для счета по формуле (6) выбирался нулевой вектор, а на последующих внешних итерациях – вектор, полученный на предыдущей внешней итерации. За счет данной схемы число внутренних итераций, соответственно, должно уменьшаться.

### Вычислительный эксперимент (задача упругопластического кручения цилиндрического стержня)

Счет проводится на сетках с шагом  $h = \frac{1}{N}$ , где  $N$  – число отрезков, на которые делится расчетная область.

Для расчета использовались следующие функции:

$$f_1 = C, \quad f_2 = e^x, \quad f_3 = \sin(x),$$

а также параметр шага, не считая параметр начала и конца отрезка, на котором ищется решение. Результаты представлены в табл. 1, 2 и 3. На рис. 1 – графики полученных решений.

Таблица 1

#### Результаты счета при $f_1 = C$

Функция $f=C$	Число отрезков, $N$	Число внешних итераций, $k$	Среднее число внутренних итераций, $n$
3	20	4	53
4	120	4	881
5	280	4	3111

Таблица 2

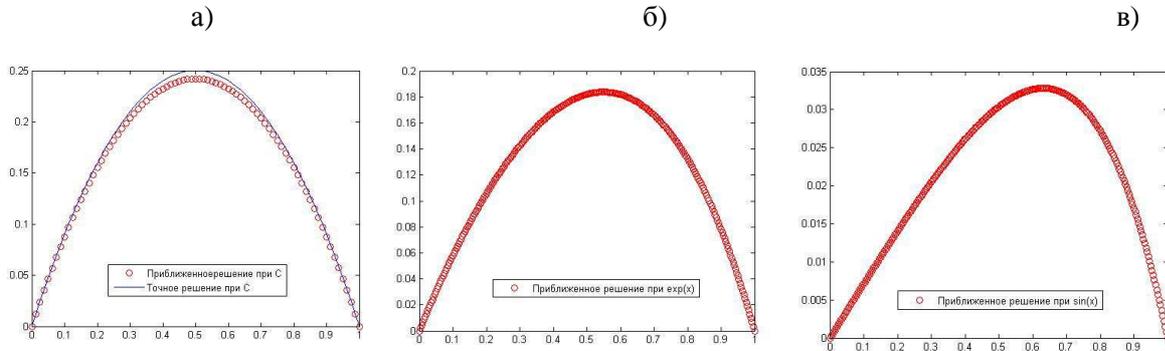
#### Результаты счета при $f_2 = e^x$

Число отрезков, $N$	Число внешних итераций, $k$	Среднее число внутренних итераций, $n$
20	5	58
120	6	878
280	6	3099

Таблица 3

**Результаты счета при  $f_3 = \sin(x)$**

Число отрезков, $N$	Число внешних итераций, $k$	Среднее число внутренних итераций, $n$
20	4	46
120	5	518
280	5	1254



*Рис. 1.* Графики решения задачи:

а – решение при  $N = 80$ ,  $f_1 = C = 2$ ; б – решение при  $N = 280$ ,  $f_2 = e^x$ ;  
в – решение при  $N = 280$ ,  $f_3 = \sin(x)$ .

**Вычислительный эксперимент (задача с препятствием)**

Для расчета использовались следующие функции плотности:

$$f_1 = -C, f_2 = -e^x, f_3 = -\sin(x),$$

и функция препятствия

$$\psi_1 = 2x(1-x) - 0.1, \psi_2 = x \sin^2(10\pi x) - 0.1, \psi_3 = (\sin 5\pi x)(\cos 3\pi x) - 0.1.$$

Результаты (при  $N = 70$ ) представлены в табл. 4, 5 и 6. На рис. 2 представлены графики полученных решений для функции препятствия  $\psi_3$ .

*Таблица 4*

**Результаты счета при  $f_1 = -2$**

Препятствие, $\psi$	Число итераций регуляризации, $k$	Среднее число внутренних итераций, $n$
$\psi_1$	4	98
$\psi_2$	6	511
$\psi_3$	4	171

*Таблица 5*

**Результаты счета при  $f_2 = -e^x$**

Препятствие, $\psi$	Число итераций регуляризации, $k$	Среднее число внутренних итераций, $n$
$\psi_1$	3	35
$\psi_2$	3	97
$\psi_3$	4	169

Таблица 6

Результаты счета при  $f_3 = -\sin(x)$ 

Препятствие, $\psi$	Число итераций регуляризации, $k$	Среднее число внутренних итераций, $n$
$\psi_1$	3	52
$\psi_2$	6	354
$\psi_3$	4	169

а)

б)

в)

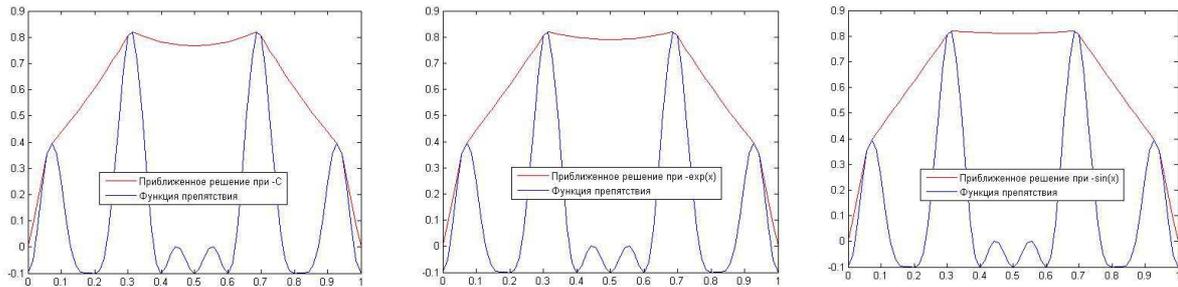


Рис. 2. Графики решения задачи с функцией препятствия  $\psi_3$ : а – решение при  $f_1 = C = -2$ ; б – решение при  $f_2 = -e^x$ ; в – решение при  $f_3 = -\sin(x)$ .

1. Гюнтер, Н.М. Курс вариационного исчисления. – СПб.: Лань, 2009. – 320 с.
2. Гловински, Р. Численное исследование вариационных неравенств / Р. Гловински, Ж.-Л. Лионс, Р. Тремольер. – М.: Мир, 1979. – 574 с.
3. Васильев, Ф.П. Регуляризованный проксимальный метод для задач минимизации с неточными исходными данными // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1993. – С. 170-188.
4. Антипин, А.С. Регуляризованный метод с прогнозом для решения вариационных неравенств с неточно заданным множеством / А.С. Антипин, Ф.П. Васильев // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2004. – Т. 44, № 5. – С. 796-804.
5. Васильев, Ф.П. Методы решения экстремальных задач. – М.: Наука, 1981. – 400 с.
6. Вержбицкий, В.М. Численные методы. Математический анализ и обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Высшая школа, 2001. – 382 с.
7. Максимова, Н.Н. Численное исследование полукоэрцитивной задачи упругопластического кручения / Н.Н. Максимова, Ю.А. Гурджидзе // Вестник Амурского государственного университета. – 2011. – № 55. – С. 15-23.
8. Максимова, Н.Н. Численное исследование вариационной задачи с препятствием с применением метода конечных элементов / Н.Н. Максимова, Р.А. Гладышев // Вестник Амурского государственного университета. – 2014. – № 67. – С. 25-32.