Математика. Прикладная математика. Механика

УДК 517.9

Т.В. Труфанова, Е.В. Ходченко

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ЗАПАЗДЫВАЮЩИМ АРГУМЕНТОМ

В статье рассматриваются применения операционного, пошагового, производящих функций и численного методов для решения задач с запаздывающим аргументом.

The article discusses the using of operating method, step-by-step method, method of generating functions and numerical method for solving the tasks with lagging argument.

Наличие отклонения – запаздывания в изучаемой системе – зачастую оказывается причиной явлений, существенно влияющих на ход процесса. Цель данной работы – применение методов последовательного интегрирования (метод шагов), производящих функций и операционного для решения дифференциального уравнения с запаздывающим аргументом и сравнение полученного решения с численным, с использованием программного пакета Matlab.

Классификация дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом

Дифференциальными уравнениями с отклоняющимся аргументом называются дифференциальные уравнения, в которых неизвестная функция и ее производные входят при различных значениях аргумента [6].

Рассмотрим дифференциальное уравнение *n*-го порядка с *l* отклонениями аргумента:

$$x^{(m_0)}(t)=f\left(t,x(t),\dots,x^{(m_0-1)}(t),x(t-\tau_1(t)),\dots,x^{(m_1)}(t-\tau_1(t)),\dots x(t-\tau_l(t)),\dots,x^{(m_l)}(t-\tau_1(t))\right),$$

где $\tau_1(t)=0$;. $\max_{0\le i\le l} m_i=\mu.$

Здесь под $x^{(k)}(t-\tau_i(t))$ понимается *k*-я производная от функции $x(z,)$, взятая в точке $z=t-\tau_i(t)$.

Обозначим в этом уравнении $\lambda=m_0-\mu.$

Уравнения, для которых $\lambda>0,$ называются уравнениями с запаздывающим аргументом.

Уравнения, для которых $\lambda=0,$ называются уравнениями нейтрального типа.

Уравнения, для которых $\lambda<0,$ называются уравнениями опережающего типа [2].

Пошаговый метод

Наиболее естественным методом решения этой задачи является так называемый метод шагов (или метод последовательного интегрирования), заключающийся в том, что решение $x(t)$ рассматриваемой задачи определяется из дифференциальных уравнений без запаздывания [1].

Пример:

$$x'(t)=x(t-1),\varphi(t)=1,\ \text{для}\ -1\le t\le 0\ . \qquad (1)$$

Найти $(t-1)$ при $n-1 \le t \le n$, где $(n=1,2,3,\ldots)$.

Решение:

Так как в данном примере $\varphi(t) = 1$ при $-1 \le t \le 0$, то при $n-1 \le t \le n$ имеем:

$x(t-1) = \varphi(t-\tau) = \varphi(t-1) = 1$.

Подставляя в исходное уравнение, получаем: $x'(t) = 1$.

Интегрируя справа и слева по t и учитывая, что $x(t_0) = \varphi(t_0) = \varphi(0) = x(0) = 1$, $x(t) = t + 1 = \varphi_1(t)$, т.е. на этом участке решение – линейная функция, имеем: при $1 \le t \le 2, x(t-1) = \varphi_1(t-\tau) = \varphi_1(t-1) = t$.

Подставляя в исходное уравнение, получаем:

$x'(t) = t$.

Интегрируя справа и слева по t, и учитывая, что $x(1) = 2$, получаем:

$x(t) = \dfrac{t^2}{2} + \dfrac{3}{3} = \varphi_2(t)$, т.е. на этом участке решение – парабола.

На последующих участках с течением времени гладкость решения повышается.

И далее при помощи индукции получаем [4]:

$$x(t) = \sum_{j=0}^{n} \frac{(t-j+1)^j}{j!}, \text{ при } n-1 \le t \le n, \text{ где } (n=1,2,3,\ldots). \quad (2)$$

Для более общего вида уравнения:

$$y'(t) + \gamma\, y(t-1) = 0, \quad (3)$$

$y(t) = y_0$ при $-1 \le t \le 0$.

Применяя метод шагов и используя метод математической индукции, получим его решение в виде:

$$y(t) = y_0 \sum_{p=0}^{[t]+1} (-\gamma)^p \frac{(t-p+1)^p}{p!}. \quad (4)$$

Метод решения дифференциальных уравнений с запаздыванием с применением преобразования Лапласа

Преобразованием Лапласа функции $f(x)$ называется функция

$$F(p) = \int_0^\infty f(t) e^{-pt}\, dt.$$

Функция $F(p)$ называется изображением функции $f(x)$, а функция $f(x)$ – оригиналом для $F(p)$ [5].

Перейдем в пространство изображений:

$$\int_0^\infty e^{-zt} y(t) dt = Y(z), \int_0^\infty e^{-zt} y'(t) dt = zY(z) - y_0.$$

Подставляя в уравнение (3) и преобразовывая правую часть, получаем:

$$zY(z) - y_0 = -\gamma \int_0^\infty e^{-zt} y(t-1) dt = Y(z) = -\gamma \int_{-1}^\infty e^{-z(t+1)} y(t) dt = -\gamma e^{-Z} Y(Z) - \gamma \int_{-1}^{0} e^{-Z(t+1)} y_0 dt =$$

$$= -\gamma e^{-Z} Y(Z) - \gamma y_0 \frac{1-e^{-Z}}{Z.}.$$

Выразим Y(z):

$$Y(Z)=\frac{y_0}{z}-\frac{\gamma y_0}{Z\left(Z+\gamma e^{-Z}\right)}.$$

Для $\operatorname{Re} z > x_1$, имеет место разложение:

$$Y(Z)=\frac{y_0}{z}-\frac{\gamma y_0}{-z^2\left(1+\frac{y}{z}e^{-Z}\right)}=\frac{y_0}{z}-y_0\sum_{p=0}^{\infty}(-1)^p\gamma^{p+1}e^{-pz}z^{-p-2}.$$

Применим теорему о равномерной сходимости [3] для $c>x_1$:

$$y(t)=\frac{y_0}{2\pi i}\int_{c-l_\infty}^{c+l_\infty}\left[\frac{e^{tz}}{z}-\sum_{p=0}^{\infty}(-1)^p\gamma^{p+1}e^{-pz}z^{-p-2}\right]dz.$$

Так как $c>0$ и ряд сходится равномерно, его можно почленно интегрировать:

$$y(t)=\frac{y_0}{2\pi i}\left[\frac{e^{tz}}{z}-\sum_{p=0}^{\infty}(-1)^p\gamma^{p+1}\right]\int_{c-l_\infty}^{c+l_\infty}e^{-pz}z^{-p-2}dz.$$

$$y(t)=y_0\left[1-\sum_{p=0}^{[t]}(-1)^p\gamma^{p+1}\frac{(t-p+1)^{p+1}}{(p+1)!}\right].$$

Следовательно:

$$y(t)=y_0\sum_{p=0}^{[t]+1}(-\gamma)^p\frac{(t-p+1)^p}{P!}$$

Метод производящих функций

Будем искать решение уравнения (3) в виде ряда:

$$Y(t,k)=\sum_{p=0}^{\infty}y(t,\gamma+p)k^p. \tag{5}$$

Предположим, что $0\le t<1,$ и запишем:

$$Y(t,k)=\sum_{p=0}^{\infty}y(t+p)k^p. \tag{6}$$

Далее:

$$Y_t(t,k)=\sum_{p=0}^{\infty}y'(t+p)k^p\ , \tag{7}$$

$$kY(t,k)=\sum_{p=0}^{\infty}y(t+p-1)k^p, \tag{8}$$

$$Y_t(t,k)+\gamma kY(t,k)=y'(t)=-\gamma y(t-1)=-\gamma y_0.$$

Это дифференциальное уравнение имеет решение

$$Y(t,k)=e^{-\gamma kt}F(k)-\frac{y_0}{k},$$

где функция $F(k)$ подлежит определению[5].

Заметим, что:

$Y(0, k) = k\, Y(1, k) + y_0$.

Подставляя это выражение и разрешая его относительно $F(k)$, получаем:

$$F(k)=\frac{y_0}{k\left(1-e^{-\gamma k}\right)}.$$

Таким образом:

$$Y(t,k)=\frac{y_0}{k}\left[\frac{e^{-\gamma kt}}{1-ke^{-\gamma k}}-1\right].$$

Это выражение может быть разложено по степеням k следующим образом.

Для $\gamma k>0$

$$Y(t,k)=\frac{y_0}{k}\left[\sum_{q=0}^{\infty}e^{-\gamma k(k+t)}k^q-1\right]=\frac{y_0}{k}\left[\sum_{q=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\left\{-\gamma(q+t)^r k^{r+q}\right\}}{r!}-1\right]=$$

$$=\frac{y_0}{k}\left[\sum_{q=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\{-\gamma(q+t)\}^{p-q}k^p}{(p-q)!}-1\right]=\frac{y_0}{k}\left[\sum_{p=0}^{\infty}k^p\sum_{q=0}^{p}\frac{\{-\gamma(q+t)\}^{p-q}}{(p-q)!}-1\right]=$$

$$=\frac{y_0}{k}\left[\sum_{p=0}^{\infty}k^{p-1}\sum_{q=0}^{p}\frac{\{-\gamma(p-q+t)\}^q}{q!}-1\right]=y_0\left[\sum_{p=0}^{\infty}k^p\sum_{q=0}^{p+1}\frac{\{-\gamma(p+t-q+1)\}^q}{q!}\right].$$

Полагая $x=t+p$ – так, что $p=[x]$, получаем:

$$y(x)=y_0\sum_{q=0}^{[x]+1}(-\gamma)^q\,\frac{(x-q+1)^q}{q!}.$$

Численный метод с использованием программного пакетаMatlab

В пакет MATLAB входит солвер dde23, основанный на методе Рунге-Кутты третьего порядка. Для $\gamma=-1$ получим:

$$\dot{x}(t)=x(t-1),\quad \varphi(t)=1,\ \text{для}\ -1\le t\le 0.$$

Начнем с программирования функции ddefun1. Ее входными аргументами должны являться: время t, вектор y компонент решения и матрица Z, столбцы которой содержат значения компонент решения в моменты запаздываний.

Вызов солвера dde23, который возвращает решение только в одном виде – структуре:

```
>>sol = dde23(@ddefun1, [1], @ddehistory1, [0 12])
sol =
    solver: 'dde23'
   history: @ddehistory1
   discont: [0 1 2 3]
        x: [1x24 double]
y: [1x24 double]
stats: [1x1 struct]
yp: [1x24 double]
```

Построение графика решения исходного уравнения:

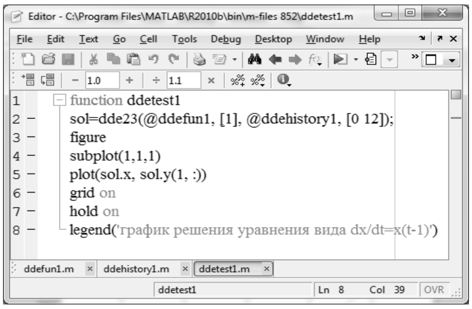
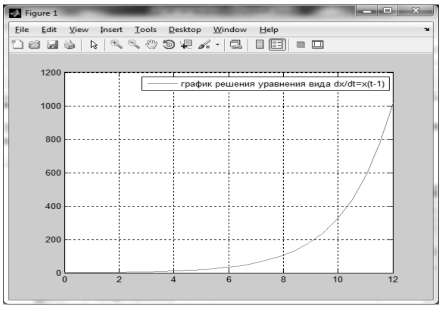


График решения уравнения:



Сравнивая численное решение исходного уравнения с решением уравнения (1), приходим к заключению, что они совпадают.

---

1. Беллман, Р. Дифференциально-разностные уравнения / Р. Беллман, И. Кук. – М., 1967.– 548 с.

2. Мышкис, А.Д. Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом.– М.: Наука, 1972.– 352 с.

3. Норкин, С.Б., Дифференциальные уравнения второго порядка с запаздывающим аргументом. – М., 1965. – 356 с.

4. Пименов, В.Г. Избранные главы дифференциальных уравнений. – Екатеренбург: Урал, 2003. – 88 с.

5. Пинни, Э. Обыкновенные дифференциально-разностные уравнения. – М.: Изд-во ин. лит., 1961.– 248 с.

6. Эльсгольц, Л.Э. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом / Л.Э. Эльсгольц, С.Б. Норкин. – М.: Наука, 1971.– 296 с.