

Т.К. Барабаш, А.И. Бурдина, А.Г. Масловская

**ИССЛЕДОВАНИЕ СПЕКТРАЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК  
ТОКОВ ПЕРЕКЛЮЧЕНИЯ СЕГНЕТОЭЛЕКТРИКОВ  
МЕТОДОМ ВЕЙВЛЕТ-АНАЛИЗА**

*Рассмотрен вопрос применения метода мультифрактального вейвлет-анализа для исследования свойств самоподобия процессов переключения поляризации сегнетоэлектриков. Ток переключения поляризации сегнетоэлектрика рассматривается как динамический отклик конечной физической системы, характеризующейся фрактальным поведением. Оценка фрактальных спектральных характеристик проведена методом максимумов модулей коэффициентов вейвлет-преобразования с реализацией в ППП Matlab.*

*The paper deals with multifractal wavelet-analysis method used for studying the self-similarity properties of polarization reorientation processes in ferroelectrics. The ferroelectric polarization switching current was considered as a dynamic response of finite physical system with fractal behavior. The estimating fractal spectral characteristic was performed by wavelet transform modulus maxima method realized with Matlab.*

**Введение**

Естественное представление о многих природных наблюдениях сводится к временным рядам, анализ которых позволяет представить эволюцию сложных физических систем и процессов. Исследование временных рядов, описывающих самоподобные стохастические процессы, можно проводить с использованием арсенала средств, которые предоставляет теория фракталов [1]. Понятие фрактала является геометрическим и характеризует не регулярный, но самоподобный объект, описывающийся нецелочисленной размерностью. Однако не только геометрические формы объектов могут иметь фрактальное строение, временные характеристики процессов и явлений, протекающих в средах с самоподобной структурой, также обнаруживают фрактальное поведение. В настоящее время теория фракталов становится одной из парадигм современной фундаментальной и экспериментальной физики. Фрактальные методы анализа широко используются в качестве математического аппарата для описания и формализации физических систем, демонстрирующих недетерминированную природу, наличие нелинейных связей, нерегулярность, нестабильность и вместе с тем самоподобие. Некоторые фракталы являются мультифракталами, представляющими неоднородные фрактальные объекты. Мультифракталы обладают не только геометрическими, но и статистическими свойствами, и для их характеристики требуется целый спектр фрактальных размерностей. Методы мультифрактального анализа позволяют не только рассчитать размерность объекта или явления, но и вычислить некоторые аналоги физических характеристик самоподобной системы.

Исследования процессов движения доменных границ и перестройки доменной структуры, а также кинетики переключения поляризации сегнетоэлектриков во многих случаях показывают, что доменная конфигурация представляет собой результат образования самоподобных и самоафинных структур а поэтому обнаруживает в целом фрактальные свойства [2-5]. Теоретический анализ законов, лежащих в основе математических моделей процессов переключения поляризации

сегнетоэлектриков, дает возможность предположить наличие мультифрактальных свойств изучаемых объектов.

Методы вейвлет-анализа позволяют получить некоторые характеристики временных зависимостей, которые невозможно получить другими методами фрактального анализа [6-8]. Так, метод вейвлет-анализа временных колебаний дает возможность локализовать временные и масштабные свойства динамических данных. Методы вейвлетного анализа успешно применяются и для исследования мультифрактальных свойств сигналов. В частности, к ним относится метод максимумов модулей коэффициентов вейвлет-преобразования (ММВП), предложенный в 1990-х гг. Мьюзи, Бакри и Арнеодо [9-10].

Цель данной работы – расчет спектральных характеристик токов переключения сегнетоэлектриков на основе применения метода мультифрактального вейвлет-анализа.

### **Расчет спектральных характеристик токов переключения поляризации сегнетоэлектриков на основе метода максимумов модулей коэффициентов вейвлет-преобразования**

Рассматриваемый алгоритм был реализован в ППП Matlab. Верификация результатов моделирования проводилась на модельном мультифрактальном сигнале, сконструированном с помощью функции Вейерштрасса. Алгоритм метода осуществляется в два основных этапа.

На первом этапе происходит вейвлет-преобразование исходного сигнала  $f(x)$  по формуле [9, 10]

$$W(a,b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot \psi\left(\frac{x-b}{a}\right) dx, \quad (1)$$

где  $a$  – параметр масштаба;  $b$  – момент времени;  $\psi$  – вейвлет-функция.

Второй этап метода заключается в построении частичных функций  $Z(q,a)$ , позволяющих получить надежные оценки характеристик вычисляемого процесса [9, 10]:

$$Z(q,a) = \sum_{l \in L(a)} \left( \sup_{a' \leq a} |W(a', x_l(a'))| \right)^q, \quad (2)$$

где  $L(a)$  – множество всех линий  $l$  – локальных максимумов модулей вейвлет-коэффициентов, существующих на масштабе  $a$ . Формула (2) означает, что выбирается максимальное значение модуля вдоль каждой линии на масштабах меньше заданного  $a$ .

Используя зависимость  $W(q,a) \propto a^{\tau(q)}$ , можно определить скейлинговую экспоненту  $\tau(q)$ . Взаимосвязь между основными величинами, рассматриваемыми в рамках алгоритма, определяется преобразованием Лежандра [1]

$$\begin{cases} \alpha = \frac{d\tau}{dq}, \\ f(\alpha) = q\alpha - \tau(q(\alpha)). \end{cases} \quad (3)$$

Спектр  $f(\alpha)$  определяет набор значений фрактальных размерностей множеств, формирующих исходный временной ряд. Для монофрактала спектр представляет собой дельтаобразную функцию. Можно отметить, что максимум спектральной кривой соответствует параметру Херста  $H = 2-D$ , где  $D$  – размерность монофрактала.

Величину  $E(a,b) = |W(a,b)|^2$  называют плотностью спектра энергии, определяющую спектральную характеристику не только для заданного масштаба, но и для параметра сдвига  $b$ . По

этой причине ее называют *локальным спектром энергии*. Величину  $E_w(a) = \int_{-\infty}^{\infty} |W(a,b)|^2 db$  именуют *глобальным спектром энергии*, или скалограммой (*scalogram*) или дисперсией вейвлет-преобразования. Для дискретного пространства вводится оценка локального спектра энергии:

$S(a_i, b_j) = |W_A(a_i, b_j)|^2$ . Очевидно, что на основе скалограммы  $S(a_i, b_j)$  можно ввести также и оценку глобального спектра энергии  $G(a_i) = \frac{1}{N^*} \sum_j S(a_i, b_j)$ , где  $N^*$  – число точек, по которому осуществляется осреднение.

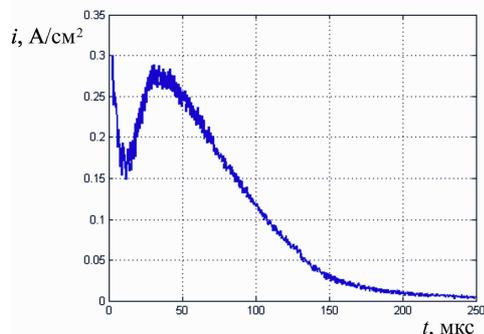
Важной характеристикой стохастических сигналов (их часто называют шумами) являются спектральные зависимости. Спектральные плотности мощности зачастую подчиняются степенным законам с постоянным показателем  $\beta$  [9]:

$$S(f) \propto C f^{-\beta},$$

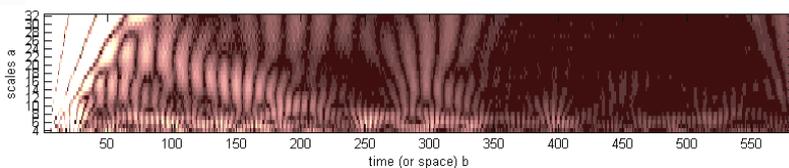
где  $f$  – частота;  $\beta$  – некоторый показатель «спада» функции  $S$ .

Если  $\beta=0$ , то шум называется белым. В этом случае спектр мощности не зависит от частоты, т.е. он в среднем не спадает и спектр постоянен. При  $\beta=2$  шум называется коричневым и представляет в некотором смысле проекцию броуновского движения на одно пространственное измерение. Если  $\beta>0$ , то мы получим черный шум. Характерной особенностью процессов, спектры которых близки к коричневым или черным шумам, является следующее: если что-то случилось однажды, то в ближайшем будущем не следует ожидать качественного изменения ситуации. Для фрактальных сигналов показатель  $\beta$  связан с параметром Херста простым соотношением  $\beta=2H+1$  [10].

Детальный анализ динамики доменных структур с учетом масштабной инвариантности позволяет сделать вывод, что поскольку процесс является результатом образования самоподобных структур, то доменная конфигурация в целом проявляет фрактальный характер [2-5]. Для описания геометрии подобных доменных конфигураций и характеристик переключения используют принципы фрактального формализма. С помощью разработанного программного приложения был проведен мультифрактальный вейвлет-анализ временной зависимости плотности тока переключения поляризации сегнетоэлектрического кристалла ниобата стронция-бария [11], представленного на рис. 1а, методом ММВП. В качестве материнского вейвлета для обработки сигнала был использован один из наиболее подходящих – вейвлет «мексиканская шляпа» (mhat). Картина вейвлет-коэффициентов, представленная на рис. 1б, наглядно показывает иерархическую структуру флуктуаций сигнала. Появление в распределении коэффициентов характерных «вилочек» (раздвоение локальных максимумов) демонстрирует дробление масштаба. Такая особенность обусловлена тем, что исследуемый сигнал обладает свойствами самоподобия.



а



б

Рис. 1. Временная зависимость плотности тока кристалла ниобата стронция-бария по данным [11] – а; проекция коэффициентов вейвлет-преобразования исходного сигнала на плоскость  $(a,b)$  – б.

Система (3) позволяет рассчитать спектральные характеристики исследуемого процесса. На рис. 2а показана зависимость  $f(\alpha)$ , дающая информацию о мультифрактальных свойствах тока переключения поляризации. Проведенный вейвлет-анализ тока переключения поляризации сегнетоэлектриков подтверждает мультифрактальную природу исследуемого сигнала. Рассчитаны его спектральные характеристики: глобальный спектр энергии и вид шума (рис. 2б). Из последнего графика можно определить показатель  $\beta=2.4$ , что в целом соответствует виду черному шуму. Анализ полученных результатов свидетельствует в пользу предположения о проявлении свойств самоорганизованного движения доменных границ в процессе переключения поляризации сегнетоэлектрических кристаллов. Движение доменных границ носит персистентный характер. При формировании последующих конфигураций учитываются предыдущие состояния – физическая система обладает памятью.

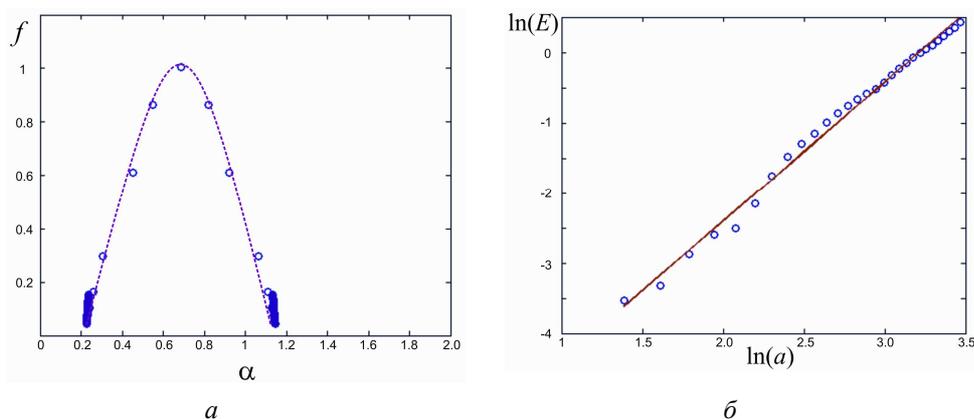


Рис 2. Мультифрактальный спектр тока переключения кристалла ниобата стронция-бария – а; спектр энергии в двойном логарифмическом масштабе – б.

### Заключение

Таким образом, метод максимумов модулей коэффициентов вейвлет-преобразования дает возможность оценить мультифрактальные свойства динамических данных, характеризующих состояние физических систем. Применение метода ММВП к мультифрактальному анализу токов переключения поляризации сегнетоэлектриков с самоподобной структурой позволяет рассчитать фрактальные характеристики процесса переполаризации, определить тип шума исследуемого процесса и говорить о постоянстве временного сигнала в целом. Рассматриваемый процесс в данном случае демонстрирует сложный скейлинг, а также характеризуется так называемым эффектом долговременной памяти и носит не случайный характер, в процессе формирования последующих состояний динамической системы учитываются предыдущие состояния.

- 
1. Божокин, С. В. Паршин, Д.А. Фракталы и мультифракталы. – Ижевск: РХД, 2001. – 128 с.
  2. Галиярова, Н.М. Диэлектрическая спектроскопия сегнетоэлектриков, фрактальность и механизмы движения доменных и межфазных границ: дис. ... д-ра физ.-мат. наук. – Воронеж: ВГАСУ, 2006. – 399 с.
  3. Пелегов, Д.В. Использование фрактального формализма для описания кинетики фазовых превращений в конечных системах: дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Екатеринбург: Уральский гос. ун-т, 2000 – 350 с.
  4. Мейланов, Р.П., Садыков, С.А. Фрактальная модель кинетики переключения поляризации в сегнетоэлектриках // ЖТФ. – 1999. – Т. 69, вып. 5. – С. 128-129.
  5. Масловская, А.Г., Барабаш, Т.К. Исследование фрактальных закономерностей процессов переключения поляризации сегнетоэлектрических кристаллов в инжекционном режиме // Поверхность. Рентгеновские, синхротронные и нейтронные исследования. – 2012. – № 1. – С. 42-49.
  6. Дремин, И.М., Иванов, О.В., Нечитайло, В.А. Вейвлеты и их использование // УФН. – 2001. – Т. 171, № 5. – С. 465-500.
  7. Лоскутов, А.Ю. Анализ временных рядов. – М.: МГУ им. М.В. Ломоносова, 2002. – 122 с.

8. Ахметханов, Р.С. Применение теории фракталов и вейвлет-анализа для выявления особенностей временных рядов при диагностике систем // Вестник научно-технического развития. – 2009. – № 1 (17). – С. 26-31.
9. Kantelhardt, J.W. Fractal and Multifractal Time Series. – Halle; Wittenberg: Institute of Physics; Martin-Luther-University, 2008. – 42 p.
10. Павлов, А.Н., Анищенко, В.С. Мультифрактальный анализ сложных сигналов // УФН. – 2007. – Т. 177, № 8. – С. 859-872.
11. Гладкий, В.В., Кириков, В.А. и др. Особенности сегнетоэлектрических свойств кристаллов  $\text{Sr}_{0.75}\text{Ba}_{0.25}\text{Nb}_2\text{O}_6$  // ФТТ. – 2033. – Т. 45, вып. 11. – С. 2067-2073.