УДК 519.711.3 + 336.7

Т.А. Галаган, А.Л. Несин

ПРИМЕНЕНИЕ АВТОРЕГРЕССИОННЫХ МОДЕЛЕЙ РАЗЛИЧНЫХ ПОРЯДКОВ ДЛЯ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ДИНАМИКИ ПОВЕДЕНИЯ КУРСА ВАЛЮТ

В данной статье рассматривается применение модели АР(m) для прогнозирования динамики поведения курса доллара США по отношению к российскому рублю, дается сравнение результатов расчетов для моделей различных порядков.

In this particular article the application model AR (m) for prognostication of the dynamic of the US dollar behavior in regards of Russian ruble is being discussed, compares the results of calculation for models of different orders.

В прогнозировании курса валют существуют два основных подхода:

фундаментальный анализ (комплексный анализ макроэкономической ситуации, складывающейся в мире на момент прогноза);

технический анализ (теория временных рядов).

Первый подход достаточно затратный, трудоемкий и сложно алгоритмизируемый. Получение прогноза на основе второго подхода легко решается с помощью создания программ для ЭВМ. Как правило, результаты прогноза, полученного методами технического анализа, в практическом применении по точности не только не уступают результатам, полученным первым методом, но и превосходят их.

Наиболее распространены следующие модели технического анализа: АР(m) (авторегрессионная модель); АРСС(n, m) (авторегрессионная модель скользящего среднего); АРПСС(n, m, k) (авторегрессионная модель проинтегрированного скользящего среднего).

В данной статье рассматривается применение АР(m) модели как наиболее приемлемой для прогнозирования курса доллара США [3].

Постановка задачи. Дан ряд значений курса российского рубля по отношению к курсу доллара США: $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_N$, где N – длина исходного ряда (интервала), т.е. количество значений, содержащихся в ряде. Необходимо спрогнозировать следующие n значений, т.е. найти значения $y_{1+N}, y_{2+N}, ..., y_{n+N}$. При этом временной период между значениями ряда остается постоянным.

Для решения поставленной задачи используем авторегрессионные модели различных порядков.

Прогнозируемые значения будем искать в виде:

$$y_i = \alpha + \beta_1 y_{i-1} + \beta_2 y_{i-2} + ... + \beta_m y_{i-m}, \tag{1}$$

где $\alpha, \beta_k, k = \overline{1, m}$ – коэффициенты модели; m – порядок модели.

Решение задачи сводится к нахождению коэффициентов в уравнении (1). Для этого будем использовать метод наименьших квадратов – минимизируем следующий функционал:

$$\sum_{i=m+1}^{N} (\alpha + \sum_{k=1}^{m} \beta_k y_{i-k} - y_i)^2 \to \min \tag{2}$$

Тогда для определения значений коэффициентов $\alpha, \beta_1, \beta_2, ..., \beta_m$ найдем частные производные уравнения (1) и приравняем их к нулю:

$$\frac{\partial \sum_{i=m+1}^{N}\left(\alpha+\sum_{k=1}^{m}\beta_k y_{i-k}-y_i\right)^2}{\partial\alpha}=2\sum_{i=m+1}^{N}\left(\alpha+\beta_1 y_{i-1}+\beta_2 y_{i-2}+...+\beta_m y_{i-m}-y_i\right)=0;$$

$$\frac{\partial \sum_{i=m+1}^{N}\left(\alpha+\sum_{k=1}^{m}\beta_k y_{i-k}-y_i\right)^2}{\partial\alpha}=2\sum_{i=m+1}^{N}y_{i-1}\left(\alpha+\beta_1 y_{i-1}+\beta_2 y_{i-2}+...+\beta_m y_{i-m}-y_i\right)=0;$$

$$\frac{\partial \sum_{i=m+1}^{N}\left(\alpha+\sum_{k=1}^{m}\beta_k y_{i-k}-y_i\right)^2}{\partial\alpha}=2\sum_{i=m+1}^{N}y_{i-2}\left(\alpha+\beta_1 y_{i-1}+\beta_2 y_{i-2}+...+\beta_m y_{i-m}-y_i\right)=0; \qquad (3)$$

...

$$\frac{\partial \sum_{i=m+1}^{N}\left(\alpha+\sum_{k=1}^{m}\beta_k y_{i-k}-y_i\right)^2}{\partial\alpha}=2\sum_{i=m+1}^{N}y_{i-m}\left(\alpha+\beta_1 y_{i-1}+\beta_2 y_{i-2}+...+\beta_m y_{i-m}\right)-y_i=0.$$

Преобразуем выражения (3) и получим систему уравнений:

$$\begin{cases}(N-m)\alpha+\beta_1\sum_{i=m+1}^{N}y_{i-1}+\beta_2\sum_{i=m+1}^{N}y_{i-2}+...+\beta_m\sum_{i=m+1}^{N}y_{i-m}-\sum_{i=m+1}^{N}y_i=0;\\ \alpha\sum_{i=m+1}^{N}y_{i-1}+\beta_1\sum_{i=m+1}^{N}y_{i-1}^2+\beta_2\sum_{i=m+1}^{N}y_{i-1}\cdot y_{i-2}+...+\beta_m\sum_{i=m+1}^{N}y_{i-1}\cdot y_{i-m}-\sum_{i=m+1}^{N}y_i\cdot y_{i-1}=0;\\ \alpha\sum_{i=m+1}^{N}y_{i-2}+\beta_1\sum_{i=m+1}^{N}y_{i-2}\cdot y_{i-1}+\beta_2\sum_{i=m+1}^{N}y_{i-2}^2+...+\beta_m\sum_{i=m+1}^{N}y_{i-2}\cdot y_{i-m}-\sum_{i=m+1}^{N}y_i\cdot y_{i-2}=0;\\ ...\\ \alpha\sum_{i=m+1}^{N}y_{i-m}+\beta_1\sum_{i=m+1}^{N}y_{i-m}\cdot y_{i-1}+\beta_2\sum_{i=m+1}^{N}y_{i-m}\cdot y_{i-2}+...+\beta_m\sum_{i=m+1}^{N}y_{y_{i-m}}^2-\sum_{i=m+1}^{N}y_i\cdot y_{i-m}=0.\end{cases} \qquad (4)$$

Запишем систему уравнений (4) в векторно-матричной форме:

$$Y\cdot\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta_1\\ \beta_2\\ ...\\ \beta_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sum_{i=m+1}^{N}y_i & \sum_{i=m+1}^{N}y_i\cdot y_{i-1} & \sum_{i=m+1}^{N}y_i\cdot y_{i-2} & ... & \sum_{i=m+1}^{N}y_i\cdot y_{i-m}\end{bmatrix}^T, \qquad (5)$$

где

$$Y=\begin{bmatrix}N-m & \sum_{i=m+1}^{N}y_{i-1} & \sum_{i=m+1}^{N}y_{i-2} & ... & \sum_{i=m+1}^{N}y_{i-m}\\ \sum_{i=m+1}^{N}y_{i-1} & \sum_{i=m+1}^{N}y_{i-1}{}^2 & \sum_{i=m+1}^{N}y_{i-1}\cdot y_{i-2} & ... & \sum_{i=m+1}^{N}y_{i-1}\cdot y_{i-m}\\ \sum_{i=m+1}^{N}y_{i-2} & \sum_{i=m+1}^{N}y_{i-1}\cdot y_{i-2} & \sum_{i=m+1}^{N}y_{i-2}{}^2 & ... & \sum_{i=m+1}^{N}y_{i-2}\cdot y_{i-m}\\ ... & ... & ... & ... & ...\\ \sum_{i=m+1}^{N}y_{i-m} & \sum_{i=m+1}^{N}y_{i-m}\cdot y_{i-1} & \sum_{i=m+1}^{N}y_{i-m}\cdot y_{i-2} & ... & \sum_{i=m+1}^{N}y_{i-m}{}^2\end{bmatrix}.$$

Выражая из нее вектор-столбец коэффициентов, получим:

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \dots \\ \beta_3 \end{bmatrix} = Y^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \sum_{i=m+1}^{N} y_i & \sum_{i=m+1}^{N} y_i \cdot y_{i-1} & \sum_{i=m+1}^{N} y_i \cdot y_{i-2} & \dots & \sum_{i=m+1}^{N} y_i \cdot y_{i-m} \end{bmatrix}^T \quad (6)$$

Подставляя полученные значения коэффициентов в (1), находим прогнозируемые значения ряда:

$$\begin{aligned} y_{N+1} &= \alpha + \beta_1 y_N + \beta_2 y_{N-1} + \dots + \beta_m y_{N-m+1} \\ y_{N+2} &= \alpha + \beta_1 y_{N+1} + \beta_2 y_N + \dots + \beta_m y_{N-m+2} \\ y_{N+n} &= \alpha + \beta_1 y_{N+n-1} + \beta_2 y_{N+n-2} + \dots + \beta_m y_{N+n-m} \end{aligned} \quad (7)$$

Для получения численных значений коэффициентов модели (1) вида (6) (6) и расчета прогнозируемых значений (7) была создана программа в среде ППП MATLAB 7.0. Программно получены различные результаты, зависящие от порядка модели и длины интервала.

Для модели первого порядка имеем:

$y_i = 0{,}86828 + 0{,}96956 y_{i-1}$ – прогноз на 25 дней;

$y_i = -0{,}1304 + 1{,}0029 y_{i-1}$ – прогноз на 50 дней;

$y_i = 0{,}48779 + 0{,}98356 y_{i-1}$ – прогноз на 100 дней.

Табл. 1 содержит прогнозируемые значения курса доллара США, полученные на основании АР (1) вида (8). Для сравнения взяты реальные значения курса указанной валюты.

Таблица 1

Результаты расчетов по модели АР (1)

Дата	Фактическое значение курса доллара США	Прогнозы значений		
		25 дней	50 дней	100 дней
10.02.11	29,301	29,233	29,209	29,262
11.02.11	29,3535	29,211	29,163	29,267
12.02.11	29,32	29,190	29,1179	29,275
15.02.11	29,258	29,170	29,0719	29,282
16.02.11	29,285	29,150	29,0259	29,288

Для модели второго порядка – АР(2) – имеем:

$y_i = 1{,}333 + 0{,}93142 y_{i-1} + 0{,}022365 y_{i-2}$ – прогноз на 25 дней;

$y_i = -0{,}14358 + 0{,}90784 y_{i-1} + 0{,}095361 y_{i-2}$ – прогноз на 50 дней;

$y_i = 0{,}65538 + 1{,}0522 y_{i-1} - 0{,}074129 y_{i-2}$ – прогноз на 100 дней.

Расчеты прогнозируемых значений моделей второго порядка представлены в табл. 2.

Таблица 2

Результаты расчетов по модели АР (2)

Дата	Фактическое значение курса доллара США	Прогнозы значений		
		25 дней	50 дней	100 дней
10.02.11	29,301	29,342	29,309	29,389
11.02.11	29,3535	29,238	29,210	29,259
12.02.11	29,32	29,317	29,249	29,409
15.02.11	29,258	29,221	29,164	29,261
16.02.11	29,285	29,293	29,191	29,431

Аналогично получаем модели третьего порядка:

$y_i = 1{,}08958 + 0{,}85762 y_{i-1} - 0{,}21115 y_{i-2} + 0{,}31465 y_{i-3}$ – прогноз на 25 дней;

$y_i = -0{,}40321 + 0{,}87793 y_{i-1} - 0{,}1532 y_{i-2} + 0{,}28664 y_{i-3}$ – прогноз на 50 дней;

$y_i = 0{,}28996 + 1{,}0632 y_{i-1} - 0{,}23469 y_{i-2} + 0{,}16143 y_{i-3}$ – прогноз 100 дней.

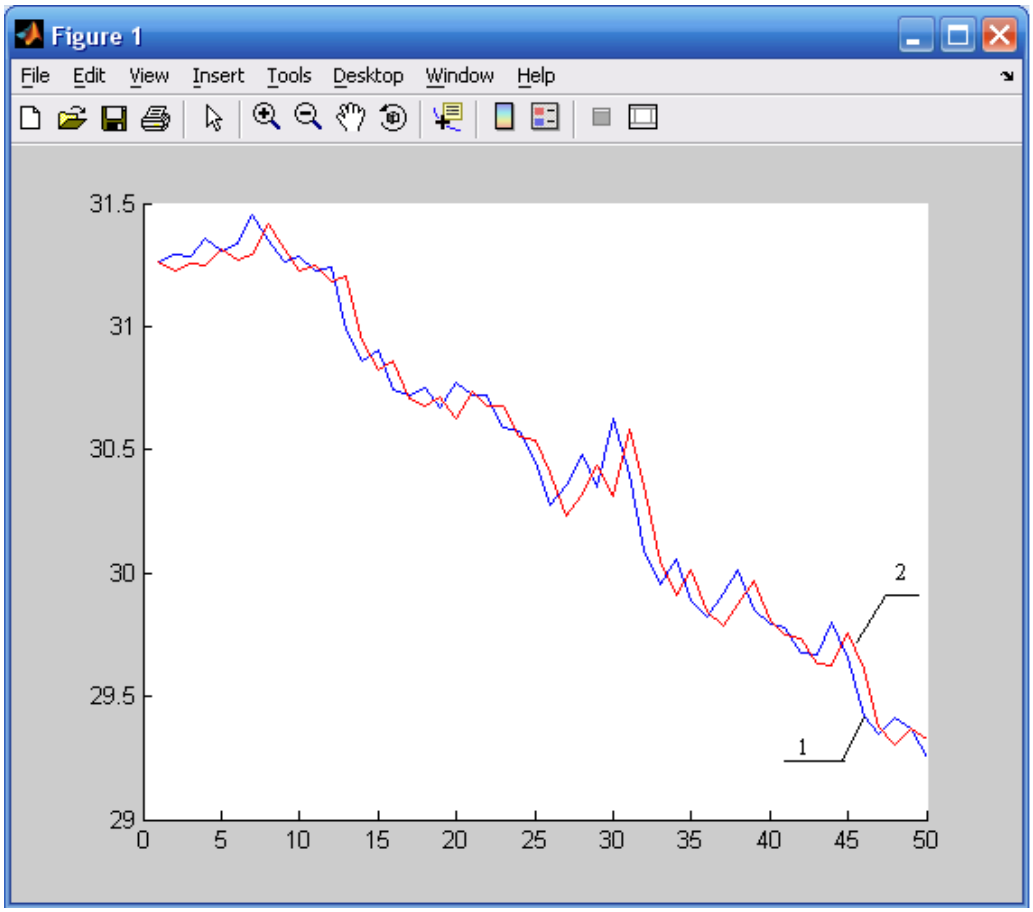
Таблица 2

Результаты расчетов по модели АР (3)

Дата	Фактическое значение курса доллара США	Рассчитанные значения для интервала		
		25 дней	50 дней	100 дней
10.02.11	29,301	29,233	29,210	29,250
11.02.11	29,3535	29,224	29,175	29,263
12.02.11	29,32	29,185	29,119	29,261
15.02.11	29,258	29,1468	29,062	29,254
16.02.11	29,285	29,119	29,010	29,250

Программа также позволяет просматривать фактические и рассчитанные по модели значения в графическом виде:

Модель АР(1) для интервала 50 дней (ломаная 1 – фактические значения, ломаная 2 – поведение модели).



Полученные результаты показали, что наименее точным является прогноз модели АР(3), а наиболее точным – прогноз модели АР(2). Значение средней относительной ошибки для модели АР(2) составило 0,23%. Рассматривая полученные результаты АР(2) относительно длины интервала, получаем: 0,1 %, 0,27% и 0,28% для 25, 50 и 100 дней соответственно.

Для других моделей среднее значение ошибки составило 0,36% – для АР(1) и 0,4% – для АР(3). По длине интервала 0,38%, 0,63% и 0,09% для 25, 50 и 100 дней АР(1); 0,41%, 0,63% и 0,15% – для 25, 50 и 100 дней АР(2).

Из этого можно сделать вывод, что для прогнозирования курса валют составление моделей выше 2-го порядка нецелесообразно.

---

1. Бокс, Дж. Анализ временных рядов и управление / Дж. Бокс, Г. Дженкинс – М.: Мир, 1974. – 406 с.

2. Садовникова, Н.А. Анализ временных рядов и прогнозирование / Н.А. Садовникова, Р.А. Шмойлова. – М.: Изд-во Московского гос. ун-та экономики, статистики и информатики, 2001. – 67 с.

3. Федорова, Е.К. Статистический анализ динамики курсов валют // Процессы управления и устойчивость. Труды XXXIX Международной конференции. – СПб.: Изд-во СПбГУ, 2008. – 523 с.