

СОЗДАНИЕ СИГНАЛОВ С ЗАДААННЫМИ МОМЕНТНЫМИ ФУНКЦИЯМИ

Задача функциональной идентификации сводится к нахождению математического описания системы. Тестирование системы с помощью белого шума дает максимально возможную скорость получения информации о поведении системы. Объясняется это его статистическими свойствами. В статье рассматриваются способы создания таких сигналов.

The problem of functional identification is reduced to a presence of the mathematical description of system. Testing of system with the help of white noise gives the greatest possible speed of reception of the information on behaviour of system. It speaks his statistical properties. In clause ways of creation of such signals are considered.

Высококачественные результаты белозумовой идентификации и анализа нелинейных динамических систем могут быть получены лишь в том случае, когда выполнены жесткие требования, предъявляемые к статистическим характеристикам реально используемых тестирующих сигналов. Эти сигналы должны иметь заданные корреляционные (моментные) функции второго и более высоких порядков, близкие к корреляционным функциям идеального белого гауссовского шума.

Для решения задачи формирования тестирующих сигналов с требуемыми характеристиками был использован способ компенсации нелинейных искажений.

Пусть имеется некоторый произвольный сигнал $z(t)$, полученный от физического либо алгоритмического датчика псевдослучайных чисел (далее – ПСЧ). Предположим, что этот сигнал $z(t)$ является выходным сигналом некоторой системы приема-передачи информации (далее – СППИ), на вход которой поступает белый гауссовский шум $x(t)$. Без потери общности предположим, что сигнал $x(t)$ с единичной дисперсией ($\sigma^2 = 1$) и нулевым средним ($M[x(t)] = 0$).

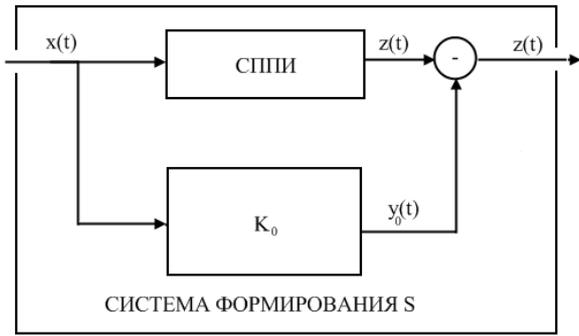
Необходимо преобразовать сигнал $z(t)$ таким образом, чтобы его характеристики стали близкими характеристикам сигнала $x(t)$ до требуемой ошибки. Чтобы осуществить такое преобразование, создадим блок компенсации (БК), на вход которого поступает тот же самый белый шум $x(t)$, а выходной сигнал $y(t)$ этого блока является таким, что при вычитании его из исходного сигнала $z(t)$ получаем желаемый сигнал, обладающий статистическими характеристиками белого гауссовского шума. Образованная по этой схеме новая система формирования сигнала может быть рассмотрена и как система компенсации искажений, возникающих при прохождении сигнала $x(t)$ через СППИ.

Выходной сигнал $y(t)$ блока компенсации (БК) может быть представлен в виде ортогонального разложения в ряд Винера:

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} G_n[\{k\}, x(t)].$$

Для формирования желаемого выхода $x(t)$ организуем последовательную процедуру, при которой БК описывается вначале только функционалом нулевой степени – $G_0[k_0, x(t)]$, затем только

первой степени – $G_1[k_1, x(t)]$, после этого второй $G_2[k_2, x(t)]$ и т.д. При этом всегда учитываем цель – выполнение равенства $x_{\text{желаемый}}(t) = x(t)$ в смысле статистических характеристик.



Система S формирования сигнала.

$$z^{(0)}(t) = z(t) - y_0(t) = z(t) - k_0. \quad (2)$$

Ядро нулевого порядка этой системы:

$$S_0 = M[z^{(0)}(t)].$$

Для блока компенсации ядро нулевого порядка есть $k_0 = M[z^{(0)}(t)]$, что с учетом (2) дает

$$k_0 = M[z(t)] - M[z^{(0)}(t)].$$

Так как $M[z^{(0)}(t)] = M[x_{\text{жс}}(t)] = 0$ из условий, то

$$k_0 = M[z(t)].$$

Следовательно, при формировании желаемой реализации сигнала на первом этапе необходимо из имеющегося сигнала $z(t)$ вычесть его математическое ожидание, т.е. выполнить обычную операцию центрирования сигнала $z(t)$:

$$z^{(0)}(t) = z(t) - M[z(t)].$$

После выполнения операции нормирования

$$z^{(0)}(t) = z^{(0)}(t) / \sigma_{z^{(0)}}$$

получаем сигнал $z(t)$, первые два центральных момента которого уже имеют требуемые значения. Второй этап компенсации (при $n = 1$) предполагает преобразование $z^{(0)}(t)$. Ядро первого порядка

$$S_1(\tau) = M[z^{(1)}(t), x(t - \tau)],$$

а входной сигнал

$$z^{(1)}(t) = z^{(0)}(t) - y_1(t) = z^{(0)}(t) - \int_{E_q} k_1(\tau) x(t - \tau) d\tau. \quad (3)$$

Ядро первого порядка $k_1(\tau)$ в правой части выражения (3) является неизвестной функцией. В соответствии с взаимокорреляционным методом оно должно быть определено как

$$k_1(\tau) = M[y_1(t)x(t - \tau)] = M[z^{(0)}(t)x(t - \tau)] - M[z^{(1)}(t)x(t - \tau)], \quad (4)$$

но $z^{(1)}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} G_n[\{S\}, x(t)]$, тогда в силу ортогональности G_n -функционалов

$$M[z^{(1)}(t)x(t - \tau)] = M\left[\int_{E^1} S_1(\alpha) x(t - \alpha) d\alpha\right](t - \tau),$$

выражение (4) принимает вид:

Компенсация искажений сигнала $z(t)$ блоком БК с учетом представления сигнала $y(t)$ в виде набора ортогональных функционалов будет выполняться по формуле:

$$x_{\text{жс}}(t) = z(t) - \sum_{n=0}^{\infty} G_n[\{k\}, x(t)]. \quad (1)$$

На первом этапе компенсации, т.е. при $n = 0$, имеем систему S формирования сигнала, изображенную на рисунке. Согласно (1) выходной сигнал $z^{(0)}(t)$ системы формирования S определяется как

$$k_1(\tau) = M[z^{(0)}(t)x(t-\tau)] - M\left[\int_{E^1} S_1(\alpha)x(t-\alpha)d\alpha\right](t-\tau).$$

Так как $S_1(\tau) = R_{x^2}(\tau)$, то с учетом свойств белого шума, получаем

$$k_1(\tau) = M[z^{(0)}(t)x(t-\tau)] - R_{x^2}(\tau) = 0,$$

отсюда выходной сигнал $z^{(1)}(t)$:

$$z^{(1)}(t) = z^{(0)}(t) - \int_{E^1} M[z^{(0)}(t)x(t-\tau)]x(t-\tau)d\tau + \int_{E^1} R_{x^2}(\tau)x(t-\tau)d\tau,$$

или

$$z^{(1)}(t) = z^{(0)}(t) - \int_{E^1} (M[z^{(0)}(t)x(t-\tau)] - R_{x^2}(\tau))x(t-\tau)d\tau. \quad (5)$$

Рассмотрим теперь третий этап компенсации. С учетом того, что сигнал $z^{(1)}(t)$ уже центрирован и нормирован и что $z^{(2)}(t) \rightarrow x(t)$, ядро второго порядка

$$S(\tau_1, \tau_2) = 2^{-1} M[z^{(2)}(t)x(t-\tau_1)x(t-\tau_2)] = 2^{-1} R_{x^3}(\tau_1, \tau_2). \quad (6)$$

Выходной сигнал $z^{(2)}(t)$ определяется как

$$z^{(2)}(t) = z^{(1)}(t) - y_2(t) = z^{(1)}(t) - \int_{E^2} k_2(\tau_1, \tau_2) \prod_{j=1}^2 x(t-\tau_j) d\tau_j + k_{0_2}. \quad (7)$$

Ядро второго порядка блока компенсации:

$$k_2(\tau_1, \tau_2) = 2^{-1} M[y_2(t) \prod_{j=1}^2 x(t-\tau_j)] = 2^{-1} (M[z^{(1)}(t) \prod_{j=1}^2 x(t-\tau_j)] - M[z^{(2)}(t) \prod_{j=1}^2 x(t-\tau_j)]). \quad (8)$$

Выражение (8) с учетом (6) примет вид:

$$k_2(\tau_1, \tau_2) = 2^{-1} (M[z^{(1)}(t) \prod_{j=1}^2 x(t-\tau_j)] - S_2(\tau_1, \tau_2)) = 2^{-1} (M[z^{(1)}(t) \prod_{j=1}^2 x(t-\tau_j)] - 2^{-1} R_{x^{33}}(\tau_1, \tau_2), \quad (9)$$

Подставив (9) в (7), получим соотношение для корреляции сигнала $z^{(1)}(t)$, чтобы получить $z^{(2)}(t)$:

$$z^{(2)}(t) = z^{(1)}(t) - 2^{-1} \int_{E^2} M[z^{(1)}(t) \prod_{j=1}^2 x(t-\tau_j)] \prod_{j=1}^2 x(t-\tau_j) d\tau_j + \int_{E^2} R_{x^3}(\tau_1, \tau_2) \prod_{j=1}^2 x(t-\tau_j) d\tau_j + 2^{-1} \int_{E^1} (M[z^{(1)}(t)x^2(t-\tau_1)] d\tau_1 - 2^{-1} \int_{E^1} R_{x^3}(\tau_1, \tau_1) d\tau_1. \quad (10)$$

Принимая во внимание, что для белого гауссовского сигнала моментная функция $R_{x^3}(\tau_1, \tau_1) = 0$, выражение (10) приобретает вид:

$$z^{(2)}(t) = z^{(1)}(t) - 2^{-1} \int_{E^2} M[z^{(1)}(t)x(t-\tau_1)x(t-\tau_2)] \prod_{j=1}^2 x(t-\tau_j) d\tau_j + 2^{-1} \int_{E^2} M[z^{(1)}(t)x^2(t-\tau_1)] d\tau_1. \quad (11)$$

Рассмотрим четвертый этап компенсации, на котором осуществляется преобразование сигнала $z^{(2)}(t)$.

Здесь ядро третьего порядка S_3 системы формирования равно:

$$S_3(\tau_1, \tau_2, \tau_3) = 6^{-1} M[z^{(3)}(t) \prod_{j=1}^3 x(t-\tau_j)],$$

Или, с учетом того, что $z^{(3)}(t) \rightarrow x(t)$

$$S_3(\tau_1, \tau_2, \tau_3) = 6^{-1} R_{x^3}(\tau_1, \tau_2, \tau_3). \quad (12)$$

Выходной сигнал

$$z^{(3)}(t) = z^{(2)}(t) - y_3(t) = z^{(2)}(t) - \int_{E^3} k_3(\tau_1, \tau_2, \tau_3) \prod_{j=1}^3 x(t - \tau_j) d\tau_j - \int_{E^1} k_1(\tau) x(t - \tau) d\tau.$$

Ядро третьего порядка блока компенсации

$$k_3(\tau_1, \tau_2, \tau_3) = 6^{-1} [y_3(t) \prod_{j=1}^3 x(t - \tau_j)] = 6^{-1} M[z^{(2)}(t) \prod_{j=1}^3 x(t - \tau_j)] - 6^{-1} M[z^{(1)}(t) \prod_{j=1}^3 x(t - \tau_j)].$$

Принимая во внимание (12), получаем

$$k_3(\tau_1, \tau_2, \tau_3) = 6^{-1} M[z^{(2)}(t) \prod_{j=1}^3 x(t - \tau_j)] - S_3(\tau_1, \tau_2, \tau_3) = 6^{-1} M[z^{(2)}(t) \prod_{j=1}^3 x(t - \tau_j)] - 6^{-1} R_{x^4}(\tau_1, \tau_2, \tau_3),$$

тогда выходной сигнал

$$z^{(3)}(t) = z^{(2)}(t) - \int_{E^3} M[z^{(2)}(t) \prod_{j=1}^3 x(t - \tau_j)] \prod_{j=1}^3 x(t - \tau_j) d\tau_j + 6^{-1} \int_{E^3} R_{x^4}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) \prod_{j=1}^3 x(t - \tau_j) d\tau_j + \int_{E^2} M[z^{(2)}(t) x(t - \tau_1) x^2(t - \tau_2)] x(t - \tau_1) d\tau_1 - 2^{-1} \int_{E^2} R_{x^4}(\tau_1, \tau_2, \tau_2) x(t - \tau_1) d\tau_1 d\tau_2. \quad (13)$$

Аналогичным образом находятся выражения, определяющие условия формирования тестирующего процесса при использовании блоков компенсации более высоких порядков.

Из анализа выражений (5), (11) и (13) легко видеть, что задача формирования тестирующего процесса с требуемыми характеристиками формально сводится к решению интегральных уравнений. Точное решение этих уравнений невозможно, поскольку каждое из них содержит более чем одну неизвестную функцию. Но точного решения, в действительности, иметь не нужно. Цель формирования заключается в том, чтобы, исходя из базовой реализации сигнала $z(t)$, построить такой процесс $z^{(n)}(t)$, который имел бы многомерные корреляционные функции, близкие к теоретическим R_{xx}^n , т.е. получить сигнал $z^{(n)}(t)$, для которого условия (5), (11) и (13) стали бы выполняться с какой-то заранее заданной точностью. И такой сигнал $z^{(n)}(t)$, как показали исследования, можно построить в результате организации сходящейся процедуры формирования. Реализация этой процедуры осуществляется на основе использования метода Пикара (последовательных приближений).

Разработанный на алгоритмическом языке формирователь белого шума показал хорошую сходимость описанных выше итерационных процедур. В то же время автором работы [2] предложен быстрый алгоритм формирования сигналов типа белого шума, учитывающий ортогональность его статистических характеристик – моментных функций.

Так, известно, что корреляционный момент представляет собой функцию от нескольких переменных. Пусть корреляционный момент имеет вид:

$$R_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_m), \quad (14)$$

где R_i - корреляционный момент некоторого i -го порядка; x_j - точки последовательности, $j = \overline{1, m}$; m - количество точек последовательности, $i = \overline{0, n}$; n - общее количество всех заданных корреляционных моментов различных порядков.

Чтобы создать белый шум с заданными корреляционными моментами, надо фактически привести систему нелинейных уравнений (14) к некоторым заданным функциям. Достичь желаемого результата, т.е. привести последовательность x к такому состоянию, чтобы ее корреляционные моменты R_i соответствовали некоторым заданным – V_i , надо решить следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned}
\gamma_{i1} &= a_{i1}, \quad j = \overline{1, n}, \quad a_{1k} = \frac{\alpha_{1k}}{a_{11}}, \quad k = \overline{2, n}, \\
\gamma_{i1} &= a_{1k} - \sum_{j=1}^{k-1} \gamma_{ij} \alpha_{jk}, \quad i, k = \overline{2, n}, \quad i \geq k, \\
a_{ik} &= \frac{1}{\gamma_{ii}} \left(a_{ik} - \sum_{j=1}^{i-1} \gamma_{ij} \alpha_{jk} \right), \quad (i, k = \overline{2, n}; i < k), \\
\beta_1 &= \frac{b_1}{a_1}, \quad \beta_i = \frac{1}{\gamma_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} \gamma_{ij} \beta_j \right), \quad i = \overline{2, n}.
\end{aligned} \tag{17}$$

Далее приводятся формулы некоторых корреляционных моментов для белого шума и их производных для того, чтобы воспользоваться вышеописанным методом.

Формула 1-го корреляционного момента имеет вид:

$$R_1 = M(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n x(i). \tag{18}$$

Для белого шума все нечетные моменты должны равняться нулю. Для достижения этого условия воспользуемся следующим свойством формулы (18);

$$\begin{aligned}
M(x^{[0]}) &= \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n x^{[0]}(i), \\
x^{[1]}(j) &= x^{[0]}(j) - M(x^{[0]}), \quad j = \overline{0, n}, \\
M(x^{[1]}) &= \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n x^{[1]}(i) = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n (x^{[0]}(i) - M(x^{[0]})) = \\
&= \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n x^{[0]} - \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n M(x^{[0]}) = M(x^{[0]}) - M(x^{[0]}) = 0.
\end{aligned} \tag{19}$$

Таким образом, всего за одну итерацию формула (19) достигает нужного результата. Поэтому использование формулы Ньютона для 1-го момента нецелесообразно.

Формула 2-го корреляционного момента имеет вид:

$$R_2(k) = \frac{1}{n+1-k} \sum_{i=0}^n x(i)x(i-k), \quad k = \overline{0, m}. \tag{20}$$

Для белого шума значения функции (20) должны совпадать со значениями функции

$$V_{2k} = \begin{cases} 1; & k = 0 \\ 0; & k > 0 \end{cases} \tag{21}$$

во всех рассматриваемых точках.

Чтобы применить формулу Ньютона нужно вывести общую формулу частной производной по любому $x(t)$, $t = \overline{0, n}$ от формулы (15). Так как желаемая функция (21) есть константа при любом k , то ее частная производная по $x(t)$ равна нулю. Следовательно, поиск частной производной от функции (15) сводится к поиску частной производной от $R_2(k)$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(R_2(k) - V_2(k))}{\partial x(t)} &= \frac{\partial R_2(k)}{\partial x(t)} - \frac{\partial V_2(k)}{\partial x(t)} = \frac{\partial R_2(k)}{\partial x(t)} = \\
&= \frac{1}{n+1-k} \frac{\partial \sum_{i=k}^n (x(i)x(i-k))}{\partial x(t)}, \quad t = \overline{0, n}, \quad k = \overline{0, m}.
\end{aligned} \tag{22}$$

Последняя формула состоит из суммы частных производных отдельных произведений чисел последовательности, смещенных на некоторое число k . Все эти производные равны нулю кроме двух: при $i=t$ и $i=t+k$. Тогда формула (22) принимает вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_2(k)}{\partial x(t)} &= \frac{1}{n+1-k} \left(\frac{\partial(x(t)x(t-k))}{\partial x(t)} + \frac{\partial(x(t+k)x(t))}{\partial x(t)} \right) = \\ &= \frac{\partial R_2(k)}{\partial x(t)} = \frac{1}{n+1-k} (x(t-k) + x(t+k)), t = \overline{0, n}, k = \overline{0, m}. \end{aligned} \quad (23)$$

Поскольку числа $t-k$ и $t+k$ могут не войти в промежуток от 0 до n , то введем дополнительную функцию ограничения коэффициентов $Ogr(p)$.

$$Ogr(p) = \begin{cases} x(p); & p \in (0, n) \\ 0; & p \notin (0, n) \end{cases} \quad (24)$$

Используя новое обозначение, приводим формулу (24) в конечное реализуемое состояние:

$$\frac{\partial R_2(k)}{\partial x(t)} = \frac{1}{n+1-k} (Ogr(t-k) + Ogr(t+k)) \partial$$

Формула 3-го корреляционного момента имеет вид:

$$R_3(k_1, k_2) = \frac{1}{n+1-\max(k_1, k_2)} \sum_{i=\max(k_1, k_2)}^n x(i)x(i-k_1)x(i-k_2), k = \overline{0, m}. \quad (25)$$

Так как это нечетный момент, то желаемая функция 3-го корреляционного момента должна равняться нулю. Следовательно, частная производная по $x(t)$ от формулы (23) сводится к нахождению производной только от (25):

$$\frac{1}{\partial x(t)} (R_3(k_1, k_2) - V_3(k_1, k_2)) = \{V_3(k_1, k_2) = 0\} = \frac{\partial R_3(k_1, k_2)}{\partial x(t)}, k_1, k_2 = \overline{0, m}, t = \overline{0, n}.$$

По аналогии со 2-м корреляционным моментом получаем частную производную по $x(t)$, рассуждая следующим образом. Корреляционная функция 3-го порядка состоит из сумм произведений трех чисел последовательности, смещенных на k_1 и k_2 относительно друг друга, деленных на их количество:

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_3(k_1, k_2)}{\partial x(t)} &= \frac{1}{n+1-\max(k_1, k_2)} \sum_{i=\max(k_1, k_2)}^n x(i)x(i-k_1)x(i-k_2), \\ k_1, k_2 &= \overline{0, m}, t = \overline{0, n}. \end{aligned} \quad (26)$$

Следовательно, нас интересуют только те произведения, в которых какой-либо индекс совпадает с индексом t переменной $x(I)$, поскольку производная остальных равна нулю. Таких вариантов может быть только три, а именно: при $i = t$, $i = t+k_1$, $i = t+k_2$. Тогда формула (26), с учетом формулы (24), принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_3(k_1, k_2)}{\partial x(t)} &= \frac{1}{n+1-\max(k_1, k_2)} (Ogr(t-k_1)Ogr(t-k_2) + \\ &+ Ogr(t+k_1)Ogr(t+k_1-k_2) + Ogr(t+k_2)Ogr(t+k_2-k_1)), k_1, k_2 = \overline{0, m}, t = \overline{0, n}. \end{aligned}$$

Заметим, что функция (25) обладает следующим свойством:

$$R_3(k_1, k_2) = R_3(k_2, k_1), k_1, k_2 = \overline{0, m}.$$

Используя это свойство, можно несколько сократить количество точек корреляционного

момента 3-го порядка от n^2 до $\frac{n(n+1)}{2}$.

Из описанного метода следует, что можно значительно сократить количество изменяемых точек последовательности, представляющих собой реализуемый белый шум. Более того, количество точек будет зависеть только от требуемой памяти белого шума, но не от самой длины белошумовой последовательности. Метод позволяет одновременно улучшать корреляционные функции всех требуемых порядков – в отличие от первого рассмотренного в настоящей статье итерационного метода, при котором улучшаются моментные функции каждого порядка отдельно.

1. Музыкин, С.Н., Родионова, Ю.М. Моделирование нелинейных систем с использованием белошумовой идентификации. – М.: ОАО «Можайский полиграфический комбинат», 1999. – 200 с.

2. Булычев, Е.С. Метод быстрого создания белых гауссовских сигналов // Математическое моделирование и управление в сложных системах: Сб. научных трудов. – М.: МГАПИ, 2000. – Вып. 3. – С. 5-10.