УДК 681.2:51-7

Д.Г. Шевко

КРИТЕРИЙ ГИПЕРУСТОЙЧИВОСТИ И СИНТЕЗ НЕЛИНЕЙНО-ПРЕОБРАЗОВАННЫХ ГИБРИДНЫХ СИСТЕМ ПРЯМОГО АДАПТИВНОГО УПРАВЛЕНИЯ

В статье рассматривается метод построениягибридной нелинейно преобразованной системы прямого адаптивного управления.

The paper deals with the method of constructing the hybrid nonlinear transformed system of direct adaptive control.

Рассмотрим гибридную систему прямого адаптивного управления (ГСПАУ)

$$\frac{de(t)}{dt} = Ae(t) + B\mu(t),\ \nu(t) = G^T L^T e(t), \tag{1}$$

$$\mu_k = \chi_k \nu_k,\ \nu_k = \nu(t_k),\ \mu(t) = \mu_k \text{ при } t_k \le t < t_{k+1}, \tag{2}$$

где $e(t) \in R^n$; $\nu(t) \in R^m$; $\mu(t) \in R^m$; $m \le n$; χ_k – диагональная матрица настраиваемых коэффициентов; $t_k = k\tau$ – дискретный аналог времени; $\tau = const > 0$ – шаг дискретизации; $k = 0, 1, 2, \ldots$ – номер шага; *A*, *B*, *L*, *G* – постоянные матрицы соответствующих размеров.

Применяя нелинейное преобразование, осуществим переход от переменных $e(t) \in R^n$ к переменным $e^{[q]} \in R^{N_n^q}$. Выделим отдельно случаи скалярного и векторного управления.

<u>Скалярное управление.</u> В этом случае система (1), (2) имеет следующее описание:

$$\frac{de(t)}{dt} = Ae(t) + b\mu(t),\ \nu(t) = g^T L^T e(t), \tag{3}$$

$$\mu_k = \chi_k \nu_k,\ \nu_k = \nu(t_k),\ \mu(t) = \mu_k \text{ при } t_k \le t < t_{k+1}, \tag{4}$$

где *b* – *m*-мерный вектор; *g* – *l*-мерный вектор; χ_k, $\nu(t)$ – скалярные величины.

Рассмотрим нелинейное преобразование координат исходной системы (3), (4) при $q = 2$. Воспользуемся приемом, предложенным Р.У. Брокеттом [1], и осуществим переход от переменных $e(t) \in R^n$ к переменным $e^{[2]}(t) \in R^{N_n^2}$ с помощью выражения

$$H(t) = e(t)e^T(t), \tag{5}$$

где *H*(*t*) – симметричная матрица, элементами которой являются попарные произведения элементов вектора *e*(*t*).

Дифференцируя выражение (5) и учитывая первое из уравнений (3), получим:

$$\frac{dH(t)}{dt} = AH(t) + H(t)A^T + \mu(t)(be^T(t) + e(t)b^T). \tag{6}$$

Выполняя преобразование выражения (6), уравнение нелинейной нестационарной части (ННЧ) нелинейно-преобразованной системы определим в виде

$$\mu^{[2]}(t) = \mu(t)e(t), \tag{7}$$

а уравнение состояния линейной стационарной части (ЛСЧ) нелинейно-преобразованной системы запишем следующим образом:

$$\frac{de^{[2]}(t)}{dt} = A_{[2]}e^{[2]}(t) + b_{[2]}\mu^{[2]}(t), \tag{8}$$

где $e^{[2]}(t)$ – вектор размера $(N_n^2 * 1)$; $N_n^2 = 0.5n(n+1)$; $\mu^{[2]}(t)$ – вектор размера $(n*1)$; $A_{[2]}$ и $b_{[2]}$ – матрицы размера соответственно $(N_n^2 * N_n^2)$ и $(N_n^2 * n)$; для выхода нелинейно-преобразованной системы можно записать уравнение

$$v^{[2]}(t) = e(t)e^T(t)Lg = (g^T L^T)_{[2]} e^{[2]}(t), \tag{9}$$

где $(g^T L^T)_{[2]}$ – матрица размера $(n * 0.5n(n+1))$, элементы которой удовлетворяют соотношению

$$(g^T L^T)_{[2]} = \begin{pmatrix} g^T L^T & 0 & \dots & 0 \\ 0 & g^T L^T & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & g^T L^T \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Таким образом, нелинейно-преобразованная система описывается уравнениями (8), (9), (7), (4).

<u>Векторное управление</u>. В этом случае исходная система описывается уравнениями (1), (2). Дифференцируя выражение (5) с учетом системы (1), (2), получим:

$$\begin{aligned} \frac{dH(t)}{dt} &= AH(t) + H(t)A^T + B\mu(t)e^T(t) + e(t)\mu^T(t)B^T = \\ &= AH(t) + H(t)A^T + \sum_{j=1}^{m} \mu_j(t)(b_j e^T(t) + e(t)b_j^T), \end{aligned} \tag{11}$$

где b_j – j-й столбец матрицы B; $\mu_j(t)$ – j-й элемент вектора $\mu(t)$.

Выполняя преобразования выражения (11), получим следующий результат:

$$\begin{aligned} \frac{de^{[2]}(t)}{dt} &= A_{[2]} e^{[2]}(t) + \sum_{j=1}^{m} (b_j)_{[2]} \mu_j^{[2]}(t), \\ v_j^{[2]}(t) &= e(t)e^T(t)Lg_j = (g_j^T L^T)_{[2]} e^{[2]}(t), \\ \mu_j^{[2]}(t) &= \mu_j(t)e(t), \\ (g_j^T L^T)_{[2]} &= \begin{pmatrix} g_j^T L^T & 0 & \dots & 0 \\ 0 & g_j^T L^T & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & g_j^T L^T \end{pmatrix}, \ j = \overline{1, m}, \end{aligned} \tag{12}$$

где g_j – j-й столбец матрицы G; $\mu_j^{[2]}(t)$, $v_j^{[2]}(t)$ – векторы размера $(n*1)$; $A_{[2]}$ и $(b_j)_{[2]}$ – матрицы размера соответственно $(N_n^2 * N_n^2)$ и $(N_n^2 * n)$.

Следовательно, используя следующие обозначения:

$$\begin{aligned} (\mu^{[2]}(t))^T &= \left((\mu_1^{[2]}(t))^T, (\mu_2^{[2]}(t))^T, \dots, (\mu_m^{[2]}(t))^T\right), \\ (v^{[2]}(t))^T &= \left((v_1^{[2]}(t))^T, (v_2^{[2]}(t))^T, \dots, (v_m^{[2]}(t))^T\right), \end{aligned} \tag{13}$$

уравнения ЛСЧ можно представить в виде

$$\begin{aligned} \frac{de^{[2]}(t)}{dt} &= A_{[2]} e^{[2]}(t) + B_{[2]} \mu^{[2]}(t), \\ v^{[2]}(t) &= (G^T L^T)_{[2]} e^{[2]}(t), \end{aligned} \tag{14}$$

где $B_{[2]}$ и $(G^T L^T)_{[2]}$ – блочные матрицы, удовлетворяющие соотношениям

$$B_{[2]} = \left((b_1)_{[2]}, (b_2)_{[2]}, \dots, (b_m)_{[2]}\right), \tag{15}$$

$$(G^T L^T)_{[2]} = \left((g_1^T L^T)_{[2]}^T, (g_2^T L^T)_{[2]}^T, \dots, (g_m^T L^T)_{[2]}^T\right). \tag{16}$$

Введем в рассмотрение некоторую функцию $z(t)$, которую определим выражением:

$$z(t) = G^T L^T e(t) \| e(t) \|^2,$$
$$z_j(t) = g_j^T L^T e(t) e^T(t) e(t) = g_j^T L^T e(t) \| e(t) \|^2, \tag{17}$$
$$j = \overline{1,m}.$$

Тогда, с учетом соотношений (12), запишем следующее равенство:

$$(\mu^{[2]}(t))^T \nu^{[2]}(t) = \mu^T(t) z(t). \tag{18}$$

Теперь осуществим дискретизацию уравнений нелинейно-преобразованной системы и получим следующее математическое описание

$$\begin{gathered} e_{k+1}^{[2]} = P_{[2]} e_k^{[2]} + D_{[2]} \mu_k^{[2]},\ \nu_k^{[2]} = (G^T L^T)_{[2]} e_k^{[2]}, \\ (\mu_k^{[2]})^T = \left((\mu_{1,k}^{[2]})^T, (\mu_{2,k}^{[2]})^T, ..., (\mu_{m,k}^{[2]})^T \right), \\ (\nu_k^{[2]})^T = \left((\nu_{1,k}^{[2]})^T, (\nu_{2,k}^{[2]})^T, ..., (\nu_{m,k}^{[2]})^T \right), \\ \nu_{j,k}^{[2]} = e_k e_k^T L g_j = (g_j^T L^T)_{[2]} e_k^{[2]}, \\ \mu_{j,k}^{[2]} = \mu_{j,k} e_k,\ j = \overline{1,m}, \end{gathered} \tag{19}$$

где $P_{[2]} = \exp(A_{[2]}\tau)$; $D_{[2]} = A_{[2]}^{-1}(P_{[2]} - E) B_{[2]}$, а дискретные аналоги соотношений (17), (18) примут вид

$$\begin{gathered} z_k = G^T L^T e_k \| e_k \|^2, \\ z_{j,k} = g_j^T L^T e_k e_k^T e_k = g_j^T L^T e_k \| e_k \|^2,\ j = \overline{1,m}, \end{gathered} \tag{20}$$

$$(\mu_k^{[2]})^T \nu_k^{[2]} = \mu_k^T z_k. \tag{21}$$

Сформулируем следующие утверждения.

<u>Утверждение 1.</u> Для гиперустойчивости (асимптотической гиперустойчивости) системы (19) необходимо и достаточно, чтобы ее нелинейная нестационарная часть удовлетворяла неравенству вида:

$$\eta(0, k_1) = -\sum_{k=0}^{k_1} \mu_k^T z_k \geq -\gamma_0^2 = const,\ \forall k_1 \geq 0, \tag{22}$$

а передаточная матрица ее линейной стационарной части

$$W(z) = (G^T L^T)_{[q]} (zE - P_{[q]})^{-1} D_{[q]},\ q = 2 \tag{23}$$

была положительной (строго положительной) вещественной матрицей.

При этом из асимптотической гиперустойчивости системы (19) следует асимптотическая гиперустойчивость системы (12). В свою очередь, из асимптотической гиперустойчивости системы (12) следует асимптотическая гиперустойчивость исходной системы (1), (2).

Таким образом, при построении гиперустойчивой (асимптотически гиперустойчивой) исходной системы можно воспользоваться критерием гиперустойчивости (утверждение 1), сформулированным относительно нелинейно преобразованной системы. Такой подход обладает существенным преимуществом, поскольку при выполнении неравенства Попова для преобразованных систем позволяет, не нарушая свойства гиперустойчивости, значительно расширить класс нелинейных нестационарных функций, описывающих ННЧ исследуемых систем.

Однако предлагаемый подход не лишен недостатков. В частности, если при исследовании положительности исходной системы, ЛСЧ которой имеет передаточную матрицу размера $(n * n)$, в результате перехода к нелинейно преобразованной системе уже при $q = 2$ передаточная матрица преобразованной системы будет иметь размер $\left(0.5(n+1) * 0.5(n+1)\right)$. Иначе говоря, с увеличением значения q происходит резкое возрастание размерности задачи исследования.

Однако путем перехода от необходимых и достаточных условий гиперустойчивости (асимптотической гиперустойчивости) нелинейно преобразованной системы к только достаточным условиям ее гиперустойчивости (асимптотической гиперустойчивости) можно обойти трудности, связанные с ростом размерности задач исследования на гиперустойчивость нелинейно преобразованных систем.

Пусть условия утверждения 1 выполнены, т.е. передаточная матрица (23) нелинейно преобразованной системы является положительной (строго положительной) вещественной матрицей. Поскольку из утверждения 1 следует также и гиперустойчивость (асимптотическая гиперустойчивость) исходной системы (1), (2), то и передаточная матрица

$$W(\lambda) = G^T L^T (\lambda E - A)^{-1} B \tag{24}$$

будет положительной (строго положительной) вещественной матрицей. Таким образом, любой положительной (строго положительной) вещественной матрице (24) исходной системы всегда отвечает некоторая положительная (строго положительная) вещественная матрица (23) нелинейно преобразованной системы. Следовательно, если выполнить условие – передаточная матрица (24) является положительной (строго положительной) вещественной, то этого достаточно, чтобы существовала некоторая матрица (23), обладающая свойством положительности (строгой положительности) и вещественности. Справедлив приведенный ниже результат.

Утверждение 2. Для гиперустойчивости (асимптотической гиперустойчивости) систем (12), (19) достаточно, чтобы выполнялось неравенство (22), а передаточная матрица (24) была бы положительной (строго положительной) вещественной матрицей.

Рассматривая утверждения 1, 2 совместно, можно сформулировать еще одно.

Утверждение 3. Если условия утверждения 2 выполнены, то исходная система (1), (2) гиперустойчива (асимптотически гиперустойчива).

С точки зрения использования критерия гиперустойчивости, утверждение 3 имеет важное практическое значение, поскольку при решении проблемы положительности ЛСЧ исходной системы оно позволяет «работать» с передаточной матрицей минимальной размерности, а при решении проблемы положительности ННЧ представляет расширенные возможности по исследованию нелинейных нестационарных систем, принадлежащих с исходной системой к одному и тому же классу.

Теперь рассмотрим основные этапы синтеза беспоисковых ГСПАУ на основе критерия гиперустойчивости и нелинейного преобразования фазовых координат системы управления.

Первый этап. Для получения эквивалентного математического описания беспоисковых ГСПАУ используются уравнения объекта управления, эталонной модели (явной или неявной) и адаптивного регулятора, относительно которых и определяются соответствующие уравнения ЛСЧ и ННЧ эквивалентной системы. Составление указанных математических описаний в явном виде здесь не приводится.

Второй этап. Рассматриваются вопросы строгой положительности и вещественности ЛСЧ системы с передаточной матрицей вида

$$\begin{gathered} W(\lambda) = G^T L^T (\lambda E - A_*)^{-1} B, \\ A_* = A_M, \end{gathered} \tag{25}$$

где A_M – матрица состояния эталонной модели, которая будет обладать свойством строгой положительности тогда, когда разрешима следующая алгебраическая задача:

$$HA_M + A_M H = -Q, \; B^T H = G^T L^T, \tag{26}$$

где $Q = Q^T > 0$, A_M – гурвицева. Решение уравнений (26) заключается в следующем: сначала для

заданных матриц A_M и Q из уравнения Ляпунова вычисляется матрица $H = H^T > 0$, а затем, при известных матрицах B и L из второго уравнения (26), определяется искомая матрица G. В тех случаях, когда $B = B(\xi)$, $L = L(\xi)$ (априорно неизвестны), возможны различные подходы к решению задачи (26), – например, можно идентифицировать элементы матриц B и L и затем решить задачу.

Возможен и иной способ решения алгебраической задачи (26) для тех случаев, когда в отличие от (25) $W(\lambda)$ описывается выражением

$$W(\lambda) = G^T L^T (\lambda E - A_*)^{-1} B, \quad A_* = A + B\chi_* G^T L^T, \tag{27}$$

где A_* – гурвицева, т.е. матрицу G или вектор g (при скалярном управлении) требуется выбрать таким образом, чтобы обеспечивалась гурвицевость полиномов степени $(n-1)$: при $m > 1$, имеющих вид $\det(\lambda E - A)\det(G^T L^T (\lambda E - A)^{-1} B)$; при $m = 1$, представляющих собой выражение $g^T L^T (\lambda E - A)^{+} b$.

<u>Третий этап.</u> Определяются условия, обеспечивающие разрешение неравенства Попова, которое в наиболее общем случае представляет собой выражение (22). Решение этого неравенства приводит к синтезу контура настройки коэффициентов адаптивного регулятора с соответствующими алгоритмами, т.е. к построению беспоисковой ГСПАУ. В тех же случаях, когда вектор состояния объекта измеряется не полностью, алгоритмы адаптации могут быть модифицированы. Для этой цели вместо неравенства (22) будем использовать выражение вида:

$$\eta(0, k_1) = -\sum_{k=0}^{k_1} \mu_k^T \nu_k \|\nu_k\|^q \geq -\gamma_0^2 = const, \ \forall k_1 \geq 0, \ \nu_k = \nu(t_k). \tag{28}$$

<u>Четвертый этап.</u> Осуществляется проверка выполнения или достижимости поставленных целей управления. В результате решения соответствующих задач второго и третьего этапов синтеза ГСПАУ, при любом $\xi \in \Xi$, систему управления следует считать асимптотически гиперустойчивой и адаптивной в классе Ξ.

<u>Пятый этап.</u> Осуществляется замена исходной технически сложной ГСПАУ на эквивалентную технически простую систему (системы управления технически эквивалентны, если для одних и тех же входных сигналов и начальных условий их реакции совпадают с высокой точностью). Такая замена опирается на результаты дискретизации непрерывной части контура адаптации исходной системы и перехода от уравнений

$$\nu(t) = G^T L^T e(t), \ \ z(t) = G^T L^T e(t) \| e(t) \|^q = \nu(t) \| e(t) \|^q \tag{29}$$

к их дискретным аналогам

$$\nu_k = G^T L^T e_k, \ z_k = G^T L^T e_k \| e_k \|^q = \nu_k \| e_k \|^q, \tag{30}$$

а также использованию соответствующего матописания ЯЭМ.

---

1. Брокетт, Р.У. Алгебры Ли и группы Ли в теории управления // Математические методы в теории систем / под ред. Ю.Н. Журавлева. – М.: Мир, 1979. – С. 174-220.