УДК 517.9

Т.В. Труфанова, Д.А. Томчаковская

ПОСТРОЕНИЕ ТОЧНОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ НЬЮЭЛЛА – УАЙТХЕДА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ УСЕЧЕННЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ

В статье рассматривается метод построения точных решений нелинейных уравнений математической физики с использованием усеченных разложений на примере уравнения Ньюэлла-Уайтхеда, представляющего собой уравнение реакции-диффузии и описывающее изменение концентрации.

In the paper the method of construction of exact solutions of the mathematical physics equations with use of the truncated expansions on an example of the Newell-Whitehead equation representing the equation of a response-diffusion, describing a modification of concentration of substance is considered.

В ряде случаев для построения точных решений нелинейных уравнений математической физики и поиска преобразования Беклунда, линеаризующего исходное уравнение, оказывается полезным использовать усеченное разложение

$$\omega = \frac{\omega_0}{\xi^p} + \frac{\omega_1}{\xi^{p-1}} + \ldots + \omega_p, \tag{1}$$

которое соответствует нулевым значениям коэффициентов разложения ω_m при проверке на свойство Пенлеве в $\omega(x,t) = \frac{1}{\xi^p}\sum_{m=0}^{\infty}\omega_m(t)\xi^m,\ \xi = \xi(x,t)$ при $m > p$ [1]. Проиллюстрируем сказанное на нелинейном уравнении Ньюэлла – Уайтхеда, используемом для анализа конвекции Релея-Бенара:

$$\omega_t = \omega_{xx} + a\omega - b\omega^3. \tag{2}$$

Проверим уравнение (2) на выполнение теста Пенлеве.

Первый этап. Подставим в (2) главный член разложения

$$\omega = \omega_0\xi^{-p},\ \omega_0 = \omega_0(t),\ \xi = x - x_0(t).$$

Получаем

$$\dot{\omega}_0\xi^{-p} + p\omega_0\dot{x}_0\xi^{-p-1} = p(p+1)\omega_0\xi^{-p-2} + a\omega_0\xi^{-p} - b\omega_0^3\xi^{-3p},$$

а затем обе части полученного выражения умножим на ξ^{p+2}.

Имеем

$$\dot{\omega}_0\xi^2 + p\omega_0\dot{x}_0\xi = p(p+1)\omega_0 + a\omega_0\xi^2 - b\omega_0^3\xi^{-2p+2},$$

где $\xi = x - x_0,\ x_0 = x_0(t),\ \omega_0 = \omega_0(t).$

Из баланса старших членов находим

$$p = 1,\ \omega_0 = \pm\sqrt{\frac{2}{b}}\ (m = 0).$$

Так как p – целое положительное число, то первое необходимое условие теста Пенлеве выполнено.

Второй этап. Поскольку уравнение инвариантно относительно замены ω на $-\omega$, достаточно рассмотреть положительное значение ω_0. Поэтому для определения резонансов подставим двучлен

$$\omega = \sqrt{\frac{2}{b}}\,\xi^{-1} + \omega_m \xi^{m-1}$$

в ведущие члены ω_{xx} и $b\omega^3$. Пересчитав производные

$$\omega_x = -\sqrt{\frac{2}{b}}\,\xi^{-2} + \omega_m (m-1)\xi^{m-2},$$

$$\omega_{xx} = 2\sqrt{\frac{2}{b}}\,\xi^{-3} + \omega_m (m-1)(m-2)\xi^{m-3},$$

получим

$$2\sqrt{\frac{2}{b}}\,\xi^{-3} + \omega_m (m-1)(m-2)\xi^{m-3} - b\cdot\left(\sqrt{\frac{2}{b}}\,\xi^{-1} + \omega_m \xi^{m-1}\right)^3 = 0.$$

При $\omega_m \xi^{m-3}$ получим выражение $((m-1)(m-2)-6)\omega_m \xi^{m-3}$.

Приравнивая нулю $((m-1)(m-2)-6)$, находим индекс Фукса $m_1 = 4$. Поскольку он целый и положительный, то второе необходимое условие Пенлеве выполнено.

Третий этап. Подставляя разложение $\omega = \sqrt{\frac{2}{b}}\,\xi^{-1} + \omega_1 + \omega_2\xi + \omega_3\xi^2 + \omega_4\xi^3 + \ldots$ в исходное уравнение, можно показать, что условие совместности не выполняется, поэтому рассматриваемое уравнение не удовлетворяет тесту Пенлеве.

Усеченное разложение для поиска точных решений.

Для дальнейшего анализа используем усеченное разложение общего вида (1) при $p = 1$.

$$\omega = \omega_0 \xi^{-1} + \omega_1. \tag{3}$$

Подставляем в исходное уравнение, получаем

$$(\omega_0)_t \xi^{-1} - \omega_0 \xi_t \xi^{-2} + (\omega_1)_t = (\omega_0)_{xx}\xi^{-1} - 2(\omega_0)_x \xi_x \xi^{-2} + 2\omega_0 \xi_x^2 \xi^{-3} - \omega_0 \xi_{xx}\xi^{-2} + (\omega_1)_{xx} + a\cdot(\omega_0\xi^{-2} + \omega_0) -$$
$$- b\cdot(\omega_0\xi^{-1} + \omega_1)^3.$$

«Собирая» члены при одинаковых степенях ξ и приравнивая их к нулю, приходим к системе уравнений:

$$\begin{aligned}
&\xi^{-3} : \omega_0\left(2\xi_x^2 - b\omega_0^2\right) = 0,\\
&\xi^{-2} : \omega_0 \xi_t = 2(\omega_0)_x \xi_x + \omega_0 \xi_{xx} + 3b\omega_0^2\omega_1,\\
&\xi^{-1} : (\omega_0)_t = (\omega_0)_{xx} + a\omega_0 - 3b\omega_0\omega_1^2,\\
&\xi^{0} : (\omega_1)_t = (\omega_1)_{xx} + a\omega_1 - b\omega_1^3.
\end{aligned} \tag{4}$$

Из первого уравнения имеем

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2}{b}}\,\xi_x$$

(второе решение, отличающееся знаком, не рассматривается, поскольку в итоге приводит к точно такому же результату). Подставив найденное ω_0 во второе и третье уравнения системы (4) и сократив на ненулевые множители, получим

$$\xi_t = 3\xi_{xx} + 3b\sqrt{\frac{2}{b}}\,\xi_x\omega_1,$$
$$\xi_{xt} = 3\xi_{xxx} + a\xi_x - 3b\,\xi_x\omega_1^2. \qquad (5)$$

Последнему уравнению системы (5), которое совпадает с исходным уравнением, можно удовлетворить, если положить $\omega_1 = 0$ или $\omega_1 = \sqrt{\frac{a}{b}}$.

Подставив значения ω_0 и ω_1 в формулу усеченного разложения (3), для решения имеем следующее представление:

1. $\omega = \dfrac{\sqrt{\frac{2}{b}}\xi_x}{\xi}$ при $\omega_0 = \sqrt{\frac{2}{b}}\xi_x,\ \omega_1 = 0,$ (6)

где функция ξ описывается переопределенной системой уравнений (5), которая получается в результате подстановки $\omega_1 = 0$:

$$\xi_t = 3\xi_{xx},$$
$$\xi_{xt} = \xi_{xxx} + a\xi_x.$$

Продифференцируем первое уравнение по *x*, второе перепишем без изменения

$$\xi_{tx} = 3\xi_{xxx},$$
$$\xi_{xt} = \xi_{xxx} + a\xi_x,$$

а затем исключим смешанную производную ξ_{tx} с помощью второго уравнения. Получим:

$$2\xi_{xxx} - a\xi_x = 0.$$

Сделаем замену

$$\xi_x = u,$$

имеем

$$2u_{xx} - au = 0.$$

Для решения уравнения сделаем подстановку

$$u = e^{\lambda x + \mu t}W(x,t),$$

получим

$$2\lambda^2 e^{\lambda x+\mu t}W(x,t) + 4\lambda e^{\lambda x+\mu t}W_x(x,t) + 2e^{\lambda x+\mu t}W_{xx}(x,t) - ae^{\lambda x+\mu t}W(x,t) = 0.$$

Проделав элементарные преобразования, получим уравнение

$$\left(2\lambda^2 - a\right)W(x,t) + 4\lambda W_x(x,t) + 2W_{xx}(x,t) = 0,$$

из которого найдем параметр λ:

$$\lambda = 0 \text{ и } a = 0.$$

Тогда уравнение примет вид:

$$W_{xx}(x,t) = 0.$$

Проинтегрировав дважды, найдем функцию $W(x,t)$:

$$W(x,t) = \varphi_1(t) + \varphi_2(t).$$

Тогда

$$u = e^{\mu t}\left(\varphi_1(t) + \varphi_2(t)\right).$$

Возвращаясь к исходным переменным, получим

$$\xi = f_1(t)x^2 + f_2(t)x + f_3(t).$$

Для определения функций $f_k(t)$ подставим выражение $f_1(t)x^2 + f_2(t)x + f_3(t)$ в систему уравнений (6). Получим

$$\dot{f}_1(t)x^2 + \dot{f}_2(t)x + \dot{f}_3(t) = 6 f_1(t),$$
$$2\dot{f}_1(t)x + \dot{f}_2(t) = 0.$$

Приравнивая к нулю функциональные коэффициенты при разных степенях *x*, а затем интегрируя соответствующие уравнения, имеем:

$$x^2 : \dot{f}_1(t) = 0 \Rightarrow f_1 = C_1,$$
$$x^1 : \dot{f}_2(t) = 0 \Rightarrow f_2 = C_2,$$
$$x^0 : \dot{f}_3(t) = 6 f_1(t) \Rightarrow f_3 = 6C_1 t + C_3,$$

где $C_1, C_2, C_3 -$ произвольные постоянные. Подставив в формулу усеченного разложения (3), находим точное решение уравнения:

$$\omega = \frac{\sqrt{\frac{2}{b}}\left(2C_1 x + C_2\right)}{C_1 x^2 + C_2 x + 6C_1 t + C_3}.$$

Рассмотрим случай $\omega_1 = \sqrt{\frac{a}{b}}.$

2. $\omega = \frac{\sqrt{\frac{2}{b}}\xi_x}{\xi} + \sqrt{\frac{a}{b}}$ при $\omega_0 = \sqrt{\frac{2}{b}}\xi_x, \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{a}{b}},$

где функция ξ описывается переопределенной системой уравнений (5), которая получается в результате подстановки $\omega_1 = \sqrt{\frac{a}{b}}$:

$$\xi_t = 3\xi_{xx} + 3\sqrt{2a}\xi_x,$$
$$\xi_{xt} = \xi_{xxx} + 2a\xi_x. \qquad (7)$$

Продифференцируем первое уравнение по *x*, второе перепишем без изменения:

$$\xi_{tx} = 3\xi_{xxx} + 3\sqrt{2a}\xi_{xx},$$
$$\xi_{xt} = \xi_{xxx} + 2a\xi_x,$$

а затем исключим смешанную производную ξ_{tx} с помощью второго уравнения. Получим:

$$2\xi_{xxx} + 3\sqrt{2a}\xi_{xx} = 0.$$

Сделаем замену

$$\xi_x = u,$$

получим

$$2u_{xx} + 3\sqrt{2a}u_x - 2au = 0.$$

Сделаем подстановку

$$u = e^{\lambda x + \mu t}W(x,t),$$

получим:

$$2\lambda^2 e^{\lambda x+\mu t}W(x,t)+4\lambda e^{\lambda x+\mu t}W_x(x,t)+2\lambda e^{\lambda x+\mu t}W_{xx}(x,t)+3\sqrt{2a}\left(\lambda e^{\lambda x+\mu t}W(x,t)+e^{\lambda x+\mu t}W_x(x,t)\right)-$$
$$-2ae^{\lambda x+\mu t}W(x,t)=0.$$

Проделав элементарные преобразования, придем к уравнению

$$\left(2\lambda^2+3\sqrt{2a}\lambda-2a\right)W(x,t)+\left(4\lambda+3\sqrt{2a}\right)W_x(x,t)+2W_{xx}(x,t)=0,$$

из которого находим параметр λ

$$\lambda=0 \text{ и } a=0.$$

$$W_{xx}(x,t))=0.$$

Проинтегрировав дважды, найдем функцию $W(x,t)$:

$$W(x,t)=\varphi_1(t)x+\varphi_2(t).$$

Тогда

$$u=e^{\mu t}(\varphi_1(t)x+\varphi_2(t)).$$

Возвращаясь к исходным переменным, получим:

$$\xi=f_1(t)x^2+f_2(t)x+f_3(t).$$

Для определения функций $f_k(t)$ подставим выражение $f_1(t)x^2+f_2(t)x+f_3(t).$ в систему уравнений (7). Получим

$$\dot{f}_1(t)x^2+\dot{f}_2(t)x+\dot{f}_3(t)=6f_1(t),$$
$$2\dot{f}_1(t)+\dot{f}_2(t)=0.$$

Приравнивая нулю функциональные коэффициенты при разных степенях x, а затем интегрируя соответствующие уравнения, имеем

$$x^2:\dot{f}_1(t)=0\Rightarrow f_1=C_1,$$
$$x^1:\dot{f}_2(t)=0\Rightarrow f_2=C_2,$$
$$x^0:\dot{f}_3(t)=6f_1(t)\Rightarrow f_3=6C_1t+C_3,$$

где C_1, C_2, C_3- произвольные постоянные. Подставив в формулу усеченного разложения (3), находим точное решение уравнения:

$$\omega=\frac{\sqrt{\frac{2}{u}}\xi_x}{\xi}+\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{\frac{2}{b}}(2C_1x+C_2)}{C_1x^2+C_2x+6C_1t+C_3}.$$

Таким образом, мы нашли точное решение уравнения Ньюэлла – Уайтхеда с помощью усеченных разложений.

---

1. Полянин, А.Д. Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики / А.Д. Полянин, В.Ф. Зайцев, А.И. Журов. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 256 с.

2. Труфанова, Т.В. Тест Пенлеве для решения обыкновенных дифференциальных уравнений / Т.В. Труфанова, А.В. Храменкова // Вестник Амурского гос. ун-та. – 2011. – Вып. 53, сер. «Естеств. и экон. науки». – С. 6-11.