

Н.Н. Максимова, Ю.А. Гурджидзе

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПОЛУКОЭРЦИТИВНОЙ ЗАДАЧИ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО КРУЧЕНИЯ

В статье рассматривается один тип полукоэрцитивной вариационной задачи, возникающей в механике. Для аппроксимации функционалов используется метод конечных элементов. Решение конечномерной задачи получается с использованием метода Зейделя и метода поточечной релаксации.

In this paper one type of semi-coercive nonlinear variational problem arising in Mechanics study. Finite element method used for approximate functional. The solution of the resulting finite-dimensional problem is carried out using the method of Seidel and relaxation of point-wise.

Введение

Многие задачи физики, механики, экономики допускают естественную вариационную постановку. Данная постановка состоит в отыскании экстремума некоторого функционала, т.е. в решении экстремальной задачи. В случае задач механики в роли минимизируемого функционала выступает функционал энергии.

Постановка в виде экстремальной задачи позволяет применить для решения эффективные оптимизационные алгоритмы. Например, для некоторого класса задач возможно применение результатов вариационного исчисления [1–4]. Однако такой подход допустим лишь для очень узкого класса задач – если сама постановка весьма «проста».

Кроме того, большинство задач являются нелинейными из-за наличия неравенств в дополнительных условиях. Такие задачи носят название «задачи с неизвестной границей». К числу их относят задачу Синьорини, модельную задачу механики с трением, задачу с препятствием, задачу упругопластического кручения цилиндрического стержня [1, 5–8] и др. Для такого рода задач методы вариационного исчисления удается использовать лишь в очень простых случаях. Поэтому естественным является применение приближенных алгоритмов решения указанных задач.

В 70-х гг. прошлого столетия бурное развитие получил вариационно-разностный метод решения подобного рода задач, основанный на конечно-разностной и конечно-элементной аппроксимации задач с последующим применением эффективных оптимизационных методов решения получаемых конечномерных задач. В настоящее время самым популярным является метод конечных элементов [9, 10].

В данной работе исследуется одномерная задача минимизации полукоэрцитивного функционала, которая в литературе носит название «задача упругопластического кручения цилиндрического стержня». В литературе [6, с. 136] представлено аналитическое решение данной задачи в полукоэрцитивном случае при функции $f(x) \equiv const$. В работе получено численное решение задачи с различными вариантами заданий параметров задачи и параметров методов. Для

численного исследования задача аппроксимирована по методу конечных элементов. Вспомогательные задачи разрешаются «зейделевским» методом и методом поточечной релаксации. Проведены вычислительные эксперименты.

Постановка задачи

Пусть Ω – некоторая открытая ограниченная область в R^n с границей Γ ; введем функциональное пространство

$$\overset{\circ}{W}_2^1(\Omega) = \{v: v \in W_2^1(\Omega), \gamma v = 0\},$$

где γ – след точки на границе Γ , представляющее собой замкнутое векторное подпространство $W_2^1(\Omega)$ и являющееся гильбертовым пространством со следующими скалярным произведением и нормой:

$$a(u, v) = \int \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v d\Omega \quad \text{и} \quad \|v\| = \left(\int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx \right)^{1/2}$$

Норма эквивалентна норме, индуцированной из $W_2^1(\Omega)$. Введем далее множество

$$K_0 = \left\{ v: v \in \overset{\circ}{W}_0^1(\Omega), |\nabla v(x)| \leq 1 \text{ н.в. в } \Omega \right\}$$

– замкнутое выпуклое множество в $\overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$ – и функционал

$$J(v) = \frac{1}{2} a(v, v) - L(v),$$

где $L(v)$ – линейная непрерывная на $\overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$ форма.

Рассмотрим следующую вариационную задачу [6, с. 133]:

$$(P_0) \quad \begin{cases} J(v) \rightarrow \min, \\ v \in K_0. \end{cases} \quad (1)$$

Так как функционал $J(v)$ непрерывный и строго выпуклый на $\overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$ и удовлетворяет условию $J(v) \rightarrow +\infty$ при $\|v\|_{\overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)} \rightarrow \infty$, то к задаче (1) применима теорема, из которой вытекает существование и единственность решения задачи (P_0) . Задача (1) эквивалентна решению вариационного неравенства [4]

$$\begin{cases} a(u, v-u) \geq L(v-u) \quad \forall v \in K_0, \\ u \in K_0. \end{cases}$$

Пусть Ω – открытая ограниченная односвязная область в R^n ; рассмотрим цилиндрический стержень, поперечное сечение которого совпадает с Ω , и предположим, что этот стержень изготовлен из упругопластического материала, подчиняющегося критерию Мизеса [11]. Стержень, в исходном состоянии которого отсутствуют напряжения, подвергается воздействию возрастающей крутящей пары, деформированное состояние стержня характеризуется углом закручивания на единицу длины Γ . Для каждого значения Γ и подходящей системы единиц измерения задачу определения поля напряжений можно привести согласно принципу Хаара-Кармана [12] к решению следующей вариационной задачи (где v – потенциал напряжений):

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 d\Omega - C \int_{\Omega} v d\Omega \rightarrow \min, \\ v \in K_0 = \left\{ v: v \in \overset{\circ}{W}_0(\Omega), |\nabla v(x)| \leq 1 \text{ н.в. в } \Omega \right\}, \end{cases} \quad (2)$$

представляющей собой частный случай задачи (P_0) , когда форма $L(v)$ задается интегралом

$$L(v) = C \int_{\Omega} v d\Omega.$$

Отметим, что оптимальное решение задачи (2) одновременно является решением задачи

$$(P_1) \begin{cases} \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 d\Omega - C \int_{\Omega} v d\Omega \rightarrow \min, \\ v \in K_1 = \left\{ v: v \in \overset{\circ}{W}_0(\Omega), |v(x)| \leq \delta(x, \Gamma) \right\}, \end{cases} \quad (3)$$

где $\delta(x, \Gamma)$ – расстояние от точки x до границы Γ .

Для частного случая $\Omega = (0,1)$ рассмотрим следующую одномерную нелинейную задачу

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \int_0^1 v^2 dx - \int_0^1 f v dx \rightarrow \min, \\ v \in K_0 = \left\{ v: v \in \overset{\circ}{W}_0(0,1), |v'| \leq 1 \text{ н.в. в } (0,1) \right\}. \end{cases} \quad (4)$$

Функционал в задаче является полукоэрцитивным, поскольку ядро билинейной формы $a(u, v) = \int_0^1 u' v' dx$ не вырождено (состоит из функций-констант).

Нетрудно проверить, что частное решение задачи при $f = C = \text{const} > 0$ задается формулой [12, с. 136]:

$$v^*(x) = \frac{C}{2} x(1-x), \text{ если } C < 2,$$

а при $C \geq 2$ – формулой

$$v^*(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{C}, \\ \frac{C}{2} \left[x(1-x) - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{C} \right)^2 \right], & \frac{1}{2} - \frac{1}{C} \leq x \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{C}, \\ 1-x, & \frac{1}{2} + \frac{1}{C} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Аппроксимация задачи и формулы для численного расчета

Для численных расчетов удобна следующая эквивалентная постановка задачи (4):

$$\begin{cases} J(v) = \frac{1}{2} \int_0^1 v'^2 dx - \int_0^1 f v dx \rightarrow \min, \\ v \in K_1 = \left\{ v: v \in \overset{\circ}{W}_0(\Omega), |v(x)| \leq \delta(x, \Gamma) \right\}. \end{cases} \quad (5)$$

Аппроксимируем задачи (4), (5) по методу конечных элементов [9, 10]. Разобьем промежуток $(0, 1)$ точками $x_{i+1} = x_1 + i \cdot h$ ($i = \overline{0, N}$), где $h = \frac{1}{N}$ – шаг аппроксимации.

Базисные функции метода конечных элементов выберем кусочно-постоянными:

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} 1 + \frac{x - x_i}{h}, & x \in [x_{i-1}, x_i], \\ 1 - \frac{x - x_i}{h}, & x \in [x_i, x_{i+1}]. \end{cases}$$

$$\text{Тогда } \varphi'_i(x) = \begin{cases} \frac{1}{h}, & x \in [x_{i-1}, x_i], \\ -\frac{1}{h}, & x \in [x_i, x_{i+1}]. \end{cases}$$

Приближенное решение ищется в виде

$$v_I(x) = \sum_{i=1}^{N+1} v_i \varphi_i(x). \quad (6)$$

Подставляя данное выражение (6) в функционал (5), получим:

$$\begin{aligned} \int_0^1 v_I'^2 dx &= \sum_{i=1}^N \int_{x_i}^{x_{i+1}} v_I'^2 dx = \sum_{i=1}^N \int_{x_i}^{x_{i+1}} (v_i \varphi'_i(x) + v_{i+1} \varphi'_{i+1}(x))^2 dx = \\ &= \sum_{i=1}^N \int_{x_i}^{x_{i+1}} (v_i \varphi'_i(x) + v_{i+1} \varphi'_{i+1}(x))^2 dx = \sum_{i=1}^N \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(v_i \left(-\frac{1}{h} \right) + v_{i+1} \frac{1}{h} \right)^2 dx = \\ &= \sum_{i=1}^N \frac{1}{h^2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (v_{i+1} - v_i)^2 dx = \sum_{i=1}^N \frac{(v_{i+1} - v_i)^2}{h^2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} dx = \sum_{i=1}^N \frac{(v_{i+1} - v_i)^2}{h^2} h = \\ &= \sum_{i=1}^N \frac{(v_{i+1} - v_i)^2}{h} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{h} (v_i^2 - 2v_i v_{i+1} + v_{i+1}^2). \end{aligned}$$

Таким образом, имеем квадратичную форму

$$\int_0^1 v_I'^2 dx = \frac{1}{h} \left(v_1^2 + v_{N+1}^2 + 2 \sum_{i=2}^N v_i^2 - 2 \sum_{i=1}^N v_i v_{i+1} \right). \quad (7)$$

Запишем матрицу жесткости [10] (матрицу полученной квадратичной формы (7)):

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{h} & -\frac{1}{h} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{h} & \frac{2}{h} & -\frac{1}{h} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{h} & \frac{2}{h} & -\frac{1}{h} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -\frac{1}{h} & \frac{2}{h} & -\frac{1}{h} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{h} & -\frac{1}{h} \end{pmatrix}.$$

Аппроксимируем второе слагаемое в функционале (5), полагая $f = const$:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f v_I dx &= f \sum_{i=1}^N \int_{x_i}^{x_{i+1}} v_I dx = f \sum_{i=1}^N \int_{x_i}^{x_{i+1}} (v_i \varphi_i(x) + v_{i+1} \varphi_{i+1}(x)) dx = f \sum_{i=1}^N \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(v_i \left(1 - \frac{x-x_i}{h} \right) + v_{i+1} \left(1 + \frac{x-x_{i+1}}{h} \right) \right) dx = \\
&= f \sum_{i=1}^N \left(v_i \left(1 - \frac{x-x_i}{h} \right)^2 \frac{1}{2 \left(-\frac{1}{h} \right)} + v_{i+1} \left(1 + \frac{x-x_{i+1}}{h} \right)^2 \frac{1}{2 \left(\frac{1}{h} \right)} \right) \Bigg|_{x_i}^{x_{i+1}} = \\
&= f \sum_{i=1}^N \left(v_{i+1} \frac{h}{2} + v_i \frac{h}{2} \right) = \frac{fh}{2} \sum_{i=1}^N (v_i + v_{i+1}) = \frac{fh}{2} \left(v_1 + v_{N+1} + 2 \sum_{i=2}^N v_i \right).
\end{aligned}$$

Таким образом, получили вектор

$$F = \begin{pmatrix} \frac{fh}{2} \\ \frac{fh}{2} \\ \dots \\ \frac{fh}{2} \\ \frac{fh}{2} \end{pmatrix}. \quad (8)$$

В итоге имеем квадратичную форму

$$I(v) = \frac{1}{2} (Av, v) - (F, v) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N+1} \sum_{j=1}^{N+1} A_{ij} v_i v_j - \sum_{i=1}^{N+1} F_i v_i, \quad (9)$$

где матрица A определяется по формуле (7), вектор F – соотношением (8). Символ (\cdot, \cdot) означает обычное евклидово произведение.

Проведем аппроксимацию допустимого множества:

$$K_{1,h} = \{v \in R^{N+1} : |v_i| \leq \delta(x_i, \Gamma)\}.$$

Окончательно имеем следующую конечномерную задачу

$$\begin{cases} I(v) = \frac{1}{2} (Av, v) - (F, v) \rightarrow \min, \\ v \in K_{1,h}. \end{cases} \quad (1)$$

0)

Чтобы получить формулы для численных расчетов, найдем частную производную функционала $I(v)$ по v_i :

$$\frac{\partial I(v)}{\partial v_i} = \sum_{j=1}^{N+1} A_{ij} v_j - F_i, \quad i = \overline{1, N+1}$$

и приравняем к нулю:

$$\sum_{j=1}^{N+1} A_{ij} v_j = F_i, \quad i = \overline{1, N+1}. \quad (11)$$

Выражение (11) представляет собой систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных v_i . Разрешить ее можно либо методом Зейделя по формуле [13]

$$v_i^{n+1} = -\frac{1}{A_{ii}} \left(\sum_{j<i} A_{ij} v_j^{n+1} + \sum_{j>i} A_{ij} v_j^n - F_i \right), \quad \overline{i=1, N+1}, \quad (1)$$

2)

либо его модификацией – методом поточечной релаксации по формулам [14]

$$\begin{cases} \tilde{v}_i^{n+1} = -\frac{1}{A_{ii}} \left(\sum_{j<i} A_{ij} v_j^{n+1} + \sum_{j>i} A_{ij} v_j^n - F_i \right), \\ v_i^{n+1} = (1-\omega)v_i^n + \omega \tilde{v}_i^{n+1} \quad (i = \overline{1, N+1}), \end{cases} \quad (13)$$

где $\omega > 0$ – параметр релаксации, подходящий выбор которого ускорит сходимость. Если параметр релаксации $\omega \in (0, 1)$, то метод является верхней поточечной релаксацией, а если $\omega \in (1, 2)$ – нижней.

После расчета по формуле (12) (либо по формулам (12), (13)) полученные значения следует проецировать на множество $K_{1,h} = \{v \in R^{N+1} : |v_i| \leq \delta(x_i, \Gamma)\}$. Нетрудно увидеть, что формула для проекции будет выглядеть следующим образом:

$$\hat{v}_i^{n+1} = \max \left\{ -\min(x_i, 1-x_i), \min(v_i^{n+1}, -\min(x_i, 1-x_i)) \right\} \quad (i = \overline{1, N+1}). \quad (14)$$

Счет по формулам (12), (14) (или (12)-(14)) будем проводить до выполнения критерия

$$\max_i |\hat{v}_i^{n+1} - \hat{v}_i^n| \leq 10^{-3} h. \quad (15)$$

Результаты численных расчетов

Счет проводится на сетках с шагом $h = \frac{1}{N}$, где N – число отрезков, на которые делится расчетная область. Приведем результаты численных расчетов по методу Зейделя (формула (12)). В качестве входных параметров выбираем число отрезков $-N$ и функцию $f \equiv C$, где $C > 0$. Количество итераций и погрешность решения представлены в табл. 1.

Таблица 1

Решение полукоэрцитивной задачи методом Зейделя

Число отрезков, N	Константа, C	Число итераций, n	Погрешность
15	25	2	0,0001
35	50	2	0,0001
50	80	3	0,0022
120	10	81	0,0051
130	40	3	0,0035
250	30	32	0,0023
500	25	43	0,0088

На рис. 1 и 2 представлены графики решения метода конечных элементов полукоэрцитивной задачи; результаты в сравнении с точным решением совпадают в рамках допустимых отклонений.

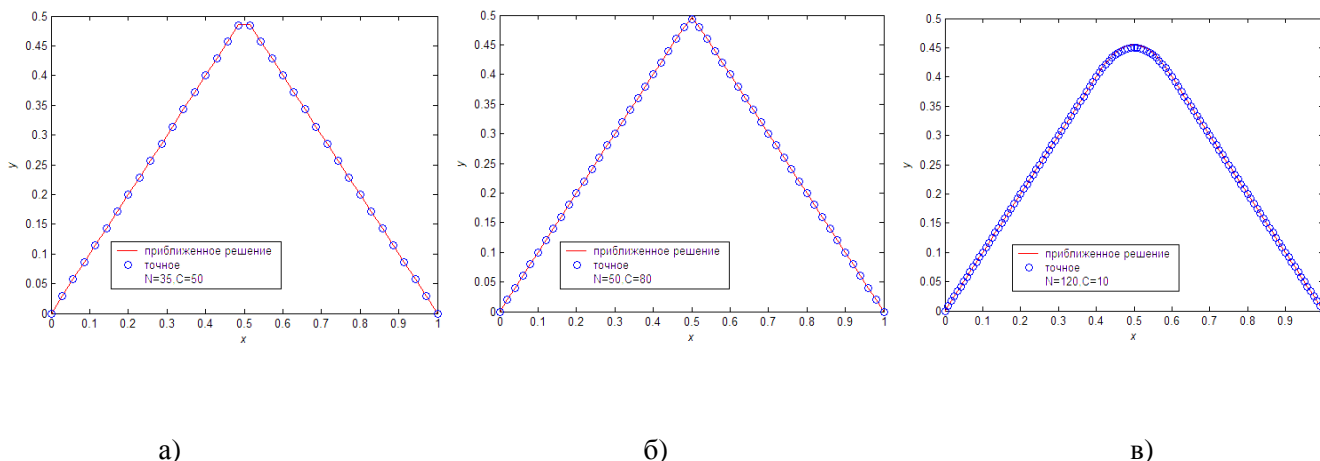


Рис. 1. Графики решения полукоэрцитивной задачи:
 а – решение при $N=35$, $C=50$; б – решение при $N=50$, $C=80$; в – решение при $N=120$, $C=10$.

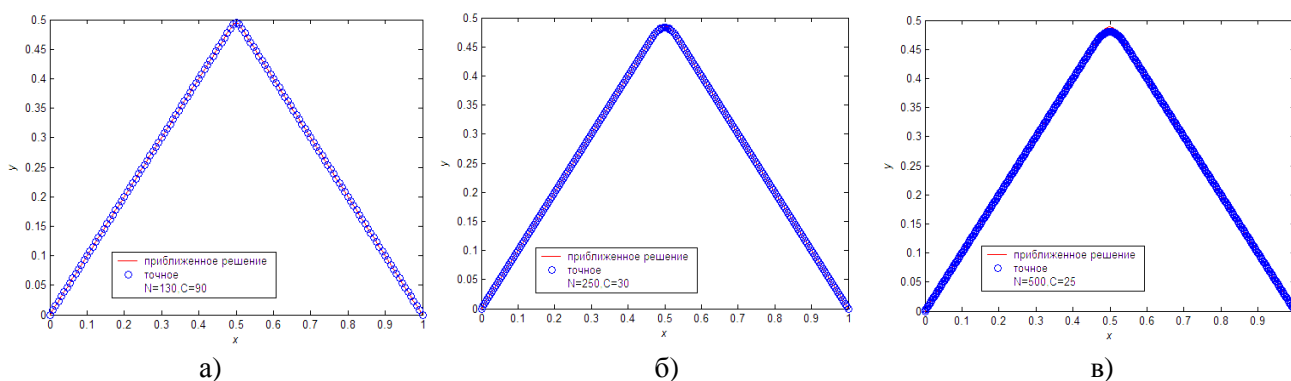


Рис. 2. Графики решения полукоэрцитивной задачи:
 а – решение при $N=130$, $C=90$; б – решение при $N=250$, $C=30$; в – решение при $N=500$, $C=25$.

Из расчетных таблиц видно, что чем меньше шаг и больше константа C , тем больше итераций требуется для сходимости метода. Однако при этом возрастает погрешность.

Рассмотрим реализацию метода поточечной релаксации. За входные параметры принимаем число отрезков N и параметр релаксации ω .

Число итераций метода поточечной релаксации для полукоэрцитивной задачи с постоянной функцией представлено в табл. 2.

Таблица 2

Число итераций метода поточечной релаксации при $f=C$

	$N=10$ $C=2$	$N=50$ $C=2$	$N=10$ $C=10$	$N=50$ $C=10$	$N=80$ $C=100$	$N=150$ $C=200$
$\omega=0,1$	335	374	40	112	17	10
$\omega=0,2$	335	498	23	97	13	9
$\omega=0,3$	171	537	17	80	10	8
$\omega=0,4$	135	539	13	70	8	7
$\omega=0,5$	111	524	10	62	7	6
$\omega=0,6$	92	499	9	54	6	5
$\omega=0,7$	78	471	7	48	5	5

$\omega=0,8$	66	440	6	42	5	4
$\omega=0,9$	57	407	5	37	4	4
$\omega=1,1$	41	342	5	28	4	4
$\omega=1,2$	35	308	6	24	5	5
$\omega=1,3$	29	275	8	21	6	5
$\omega=1,4$	23	241	10	17	7	6
$\omega=1,5$	14	207	12	11	9	8
$\omega=1,6$	15	171	16	14	111	9
$\omega=1,7$	23	134	21	18	15	13
$\omega=1,8$	33	93	33	27	22	19
$\omega=1,9$	67	61	68	52	45	38

На рис.3 и 4 представлены результаты решения полукоэрцитивной задачи методом поточечной релаксации при $\omega = 1,5$.

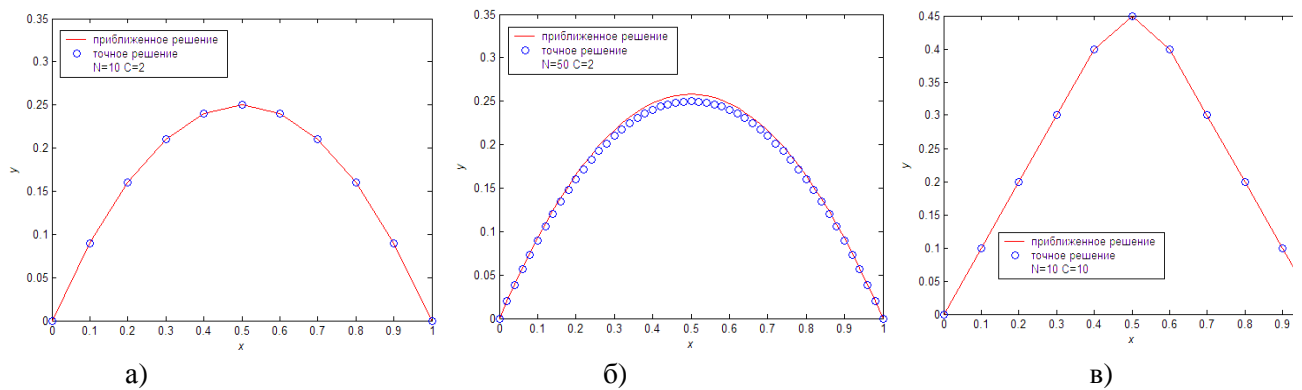


Рис. 3. Графики решения полукоэрцитивной задачи:

а – решение при $N=10, C=2$; б – решение при $N=50, C=2$; в – решение при $N=10, C=10$.

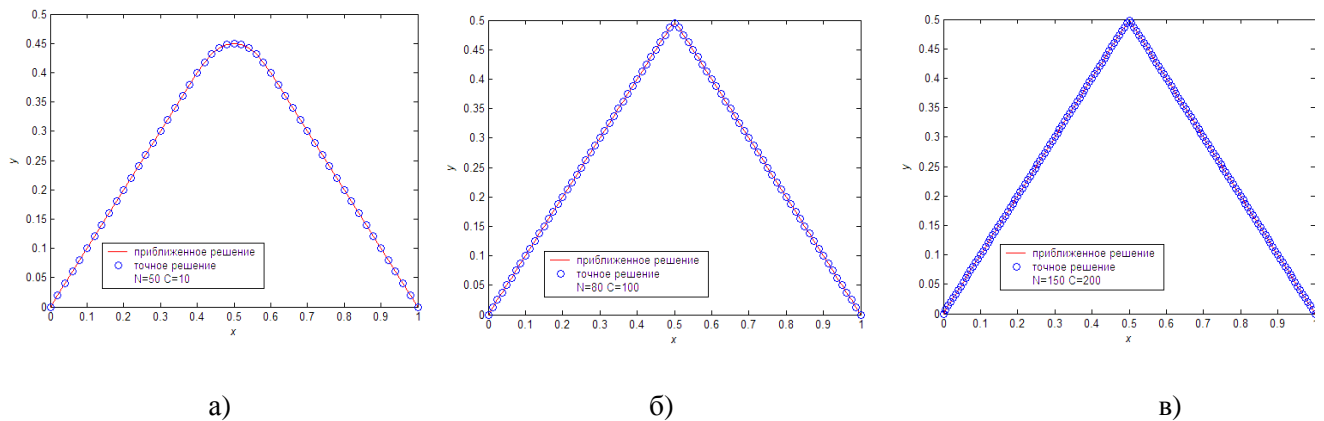


Рис. 4. Графики решения полукоэрцитивной задачи:

а – решение при $N=50, C=10$; б – решение при $N=80, C=100$; в – решение при $N=150, C=200$.

К сожалению, объем статьи не позволил авторам включить результаты расчетов с непостоянной функцией $f(x)$. Авторы планируют в будущем опубликовать эти результаты, а также результаты исследования данной задачи в коэрцитивной постановке.

1. Васидзу, К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности / К. Васидзу. – М.: Мир, 1987. – 542 с.
2. Гюнтер, Н.М. Курс вариационного исчисления / Н.М. Гюнтер. – СПб.: Лань, 2009. – 320 с.
3. Пантелеев, А.В. Методы оптимизации в примерах и задачах: учеб. пособие / А.В. Пантелеев, Т.А. Летова. – М.: Высшая школа, 2002. – 544 с.
4. Хлуднев, А.М. Задачи теории упругости в негладких областях. – М.: Физматлит, 2010. – 252 с.
5. Главачек, И. Решение вариационных неравенств в механике / И. Главачек, Я. Гаслингер, И. Нечас, Я. Ловишек. – М.: Мир, 1986. – 270 с.
6. Гловински, Р. Численное исследование вариационных неравенств / Р. Гловински, Ж.-Л. Лионс, Р. Тремольер. – М.: Мир, 1979. – 574 с.
7. Дюво, Г. Неравенства в механике и физике / Г. Дюво, Ж.-Л. Лионс. – М.: Мир, 1980. – 383 с.
8. Киндерлерер, Д. Введение в вариационные неравенства и их приложения / Д. Киндерлерер, Г. Стампакья. – М.: Мир, 1983. – 256 с.
9. Вержбицкий, В.М. Численные методы. Математический анализ и обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Высшая школа, 2001. – 382 с.
10. Зенкевич, О. Конечные элементы и аппроксимация / О. Зенкевич, К. Морган. – М.: Мир, 1986. – 318 с.
11. Бердичевский, В.Л. Вариационные принципы механики сплошной среды. – М.: Наука, 1983. – 448 с.
12. Аннин, Б.Д. Уругопластическая задача / Б.Д. Аннин, Г.П. Черепанов. – М.: Наука, 1983. – 239 с.