УДК 517.9

–

Т.В. Труфанова, В.В. Романико

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ВАН-ДЕР-ПОЛЯ МЕТОДОМ КРЫЛОВА – БОГОЛЮБОВА

В статье рассмотрено решение уравнения Ван-дер-Поля методом Крылова – Боголюбова.

In article the decision of the Van-der-Pol's equation is in detail resulted by the Krylov-Bogolyubov's method.

Рассмотрим уравнение Ван-дер-Поля

$$\ddot{x} + \mu\left(x^2 - 1\right)\dot{x} + x = 0 \tag{1}$$

в предположении, что параметр μ мал.

Приведем уравнение (1) к стандартному виду

$$\ddot{x} + x = \mu\left(1 - x^2\right)\dot{x} \tag{2}$$

Найдем решение уравнения (2) в первом приближении.

При $\mu = 0$ решением уравнения (2) будет

$$x = a\cos\psi,$$

где $\psi = t + \theta$.

Общее решение уравнения (2) ищем в виде

$$x = a\cos\psi + \mu u_1(a,\psi) + \mu^2 u_2(a,\psi) + \ldots \tag{3}$$

Величины a и ψ – функции времени, определяющиеся дифференциальными уравнениями [1]:

$$\left.\begin{aligned} &\dot{a} = \mu A_1(a) + \mu^2 A_2(a) + \ldots; \\ &\dot{\psi} = 1 + \mu B_1(a) + \mu^2 B_2(a) + \ldots \end{aligned}\right\}. \tag{4}$$

Дифференцируя (3) по t, получаем

$$\dot{x} = \left(\cos\psi + \mu\frac{\partial u_1}{\partial a} + \mu^2\frac{\partial u_2}{\partial a} + \ldots\right)\dot{a} + \left(-a\sin\psi + \mu\frac{\partial u_1}{\partial\psi} + \mu^2\frac{\partial u_2}{\partial\psi} + \ldots\right)\dot{\psi}, \tag{5}$$

$$\begin{aligned} \ddot{x} = {}&\ddot{a}\left(\cos\psi + \mu\frac{\partial u_1}{\partial a} + \mu^2\frac{\partial u_2}{\partial a} + \ldots\right) + \ddot{\psi}\left(-a\sin\psi + \mu\frac{\partial u_1}{\partial\psi} + \mu^2\frac{\partial u_2}{\partial\psi} + \ldots\right) + \\ &+ \dot{a}^2\left(\mu\frac{\partial^2 u_1}{\partial a^2} + \mu^2\frac{\partial^2 u_2}{\partial a^2} + \ldots\right) + 2\dot{a}\dot{\psi}\left(-\sin\psi + \mu\frac{\partial^2 u_1}{\partial a\partial\psi} + \mu^2\frac{\partial^2 u_2}{\partial a\partial\psi} + \ldots\right) + \\ &+ \dot{\psi}^2\left(-a\cos\psi + \mu\frac{\partial^2 u_1}{\partial\psi^2} + \mu^2\frac{\partial^2 u_2}{\partial\psi^2} + \ldots\right). \end{aligned} \tag{6}$$

Из системы (4) найдем значения величин $\ddot{a}$, $\ddot{\psi}$, $\dot{a}^2$, $\dot{a}\dot{\psi}$ и $\dot{\psi}^2$.

$$\left.\begin{aligned}
&\ddot{a}=\left(\mu\frac{dA_1}{da}+\mu^2\frac{dA_2}{da}+\ldots\right)\left(\mu A_1+\mu^2A_2+\ldots\right)=\mu^2A_1\frac{dA_1}{da}+O\left(\mu^3\right);\\
&\ddot{\psi}=\left(\mu\frac{dB_1}{da}+\mu^2\frac{dB_2}{da}+\ldots\right)\left(\mu B_1+\mu^2B_2+\ldots\right)=\mu^2B_1\frac{dB_1}{da}+O\left(\mu^3\right);\\
&\dot{a}^2=\left(\mu A_1+\mu^2A_2+\ldots\right)^2=\mu^2A_1^2+O\left(\mu^3\right);\\
&\dot{a}\dot{\psi}=\left(\mu A_1+\mu^2A_2+\ldots\right)\left(1+\mu B_1+\mu^2B_2+\ldots\right)==\mu A_1+\mu^2\left(A_2+A_1B_1\right)+O\left(\mu^3\right);\\
&\dot{\psi}^2=\left(1+\mu B_1+\mu^2B_2+\ldots\right)^2=1+2\mu B_1+\mu^2\left(B_1^2+2B_2\right)+O\left(\mu^3\right).
\end{aligned}\right\}. \tag{7}$$

Теперь в выражение для $\dot{x}$ (5) подставим разложения (4) для $\dot{a}$ и $\dot{\psi}$; в выражение для $\ddot{x}$ (6) – величины (7). Выпишем полученные выражения по степеням μ. В результате получим:

$$\begin{aligned}
\dot{x}=-a\sin\psi+\mu\left(A_1\cos\psi-aB_1\sin\psi+\frac{\partial u_1}{\partial\psi}\right)+\\
+\mu^2\left(A_2\cos\psi-aB_2\sin\psi+A_1\frac{\partial u_1}{\partial a}+B_1\frac{\partial u_1}{\partial\psi}+\frac{\partial u_2}{\partial\psi}\right)+\ldots;
\end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned}
\ddot{x}=-a\cos\psi+\mu\left(-2A_1\sin\psi-2B_1a\cos\psi+\frac{\partial^2u_1}{\partial\psi^2}\right)+\\
+\mu^2\left\{\left(A_1\frac{dA_1}{da}-aB_1^2-2aB_2\right)\cos\psi-\left(2A_2+2A_1B_1+A_1a\frac{dB_1}{da}\right)\sin\psi+\right.\\
\left.+2A_1\frac{\partial^2u_1}{\partial a\partial\psi}+2B_1\frac{\partial^2u_1}{\partial\psi^2}+\frac{\partial^2u_2}{\partial\psi^2}\right\}+\ldots
\end{aligned} \tag{9}$$

Отсюда следует, что левую часть уравнения (2) можно представить в виде

$$\begin{aligned}
\ddot{x}+x=\mu\left(-2A_1\sin\psi-2aB_1\cos\psi+\frac{\partial^2u_1}{\partial\psi^2}+u_1\right)+\\
+\mu^2\left\{\left(A_1\frac{dA_1}{da}-aB_1^2-2aB_2\right)\cos\psi-\left(2A_2+2A_1B_1+aA_1\frac{dB_1}{da}\right)\sin\psi+\right.\\
\left.+2A_1\frac{\partial^2u_1}{\partial a\partial\psi}+2B_1\frac{\partial^2u_1}{\partial\psi^2}+\frac{\partial^2u_2}{\partial\psi^2}+u_2\right\}+\ldots
\end{aligned} \tag{10}$$

Теперь запишем правую часть уравнения (2) также в виде разложения по степеням μ:

$$\mu f\left(x,\dot{x}\right)=\mu f\left[x(\mu,a,\psi),\dot{x}(\mu,a,\psi)\right]=\mu\left\{f\left(x,\dot{x}\right)\right\}_{\mu=0}+\mu^2\left\{f'_x\frac{\partial x}{\partial\mu}+f'_{\dot{x}}\frac{\partial\dot{x}}{\partial\mu}\right\}_{\mu=0}$$

или с учетом выражения (3) для x и выражения (8) для $\dot{x}$ в виде:

$$\begin{aligned}
\mu f\left(x,\dot{x}\right)=\mu f\left(a\cos\psi,-a\sin\psi\right)+\mu^2\left\{u_1f'_x\left(a\cos\psi,-a\sin\psi\right)+\right.\\
\left.+\left(A_1\cos\psi-aB_1\sin\psi+\frac{\partial u_1}{\partial\psi}\right)f'_{\dot{x}}\left(a\cos\psi,-a\sin\psi\right)\right\}.
\end{aligned} \tag{11}$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях μ в правых частях (10) и (11). В результате получим следующие уравнения:

$$\frac{\partial^2u_k}{\partial\psi^2}+u_k=f_{k-1}+2A_k\sin\psi+2aB_k\cos\psi,\ k=1,\ldots,m, \tag{12}$$

где функции f_0, f_1, …, f_{m-1} таковы:

$$\left.\begin{aligned}
&f_0 = f_0(a,\psi) = f\,(a\cos\psi, -a\sin\psi);\\
&f_1 = f_1(a,\psi) = u_1 f'_x(a\cos\psi, -a\sin\psi) +\\
&+\left(A_1\cos\psi - aB_1\sin\psi + \frac{\partial u_1}{\partial\psi}\right) f'_{\dot{x}}(a\cos\psi, -a\sin\psi) +\\
&+\left(aB_1^2 - A_1\frac{dA_1}{da}\right)\cos\psi + \left(2A_1B_1 + A_1 a\frac{dB_1}{da}\right)\sin\psi -\\
&-2A_1\frac{\partial^2 u_1}{\partial a\partial\psi} - 2B_1\frac{\partial^2 u_1}{\partial\psi^2};\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

Запишем первое уравнение системы (12).

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial\psi^2} + u_1 = f_0 + 2A_1\sin\psi + 2aB_1\cos\psi\,. \qquad (14)$$

Функция f_0 имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
&f_0 = f_0(a,\psi) = f\,(a\cos\psi, -a\sin\psi) = \left(1 - x^2\right)\dot{x} = \left(1 - a^2\cos^2\psi\right)\left(-a\sin\psi\right) =\\
&= \frac{a^3 - 4a}{4}\sin\psi + \frac{a^3}{4}\sin 3\psi.
\end{aligned} \qquad (15)$$

Подставляя (15) в (14), получаем следующее уравнение:

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial\psi^2} + u_1 = \left(\frac{a^3 - 4a}{4} + 2A_1\right)\sin\psi + \frac{a^3}{4}\sin 3\psi + 2aB_1\cos\psi\,. \qquad (16)$$

Воспользуемся необходимыми и достаточными условиями существования периодических решений уравнения (2) [2].

$$\begin{aligned}
&A_1(a) = -\frac{1}{2\pi\omega}\int_0^{2\pi} f\,(a\cos\psi, -a\omega\sin\psi)\sin\psi d\psi =\\
&-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{a^3 - 4a}{4}\sin\psi + \frac{a^3}{4}\sin 3\psi\right)\sin\psi d\psi = \frac{4a - a^3}{8}.
\end{aligned} \qquad (17)$$

$$\begin{aligned}
&B_1(a) = -\frac{1}{2\pi a\omega}\int_0^{2\pi} f\,(a\cos\psi, -a\omega\sin\psi)\cos\psi d\psi =\\
&= -\frac{1}{2\pi a}\int_0^{2\pi}\left(\frac{a^3 - 4a}{4}\sin\psi + \frac{a^3}{4}\sin 3\psi\right)\cos\psi d\psi = \frac{2 - a^2}{8\pi}\int_0^{2\pi}\sin 2\psi d\psi - \frac{a^2}{16\pi}\int_0^{2\pi}\sin 4\psi d\psi = 0.
\end{aligned} \qquad (18)$$

Заменяя A_1 и B_1 в (16) полученными выражениями (17) и (18), получаем уравнение

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial\psi^2} + u_1 = \frac{a^3}{4}\sin 3\psi\,. \qquad (19)$$

С помощью значений A_1 и B_1 найдем величины a и ψ из системы (4).

$$\dot{a} = \mu\frac{4a - a^3}{8}\,. \qquad (20\text{а})$$

$$\dot{\psi} = 1\,. \qquad (20\text{б})$$

Из уравнения (20а) отыщем амплитуду a.

$$8\int\frac{da}{4a - a^3} = \mu\int dt\,.$$

Сначала преобразуем подынтегральную функцию, находя разложение на простые дроби. Имеем

$$\frac{8}{4a-a^3}=\frac{2}{a}-\frac{1}{a-2}-\frac{1}{a+2}.$$

Интегрируя это равенство, получаем

$$8\int\frac{da}{4a-a^3}=\ln\left|\frac{a^2}{a^2-4}\right|.$$

Таким образом:

$$\ln\left|\frac{a^2}{a^2-4}\right|=\mu t+c.$$

Выразим из последнего уравнения *a:*

$$a\approx 2. \tag{21}$$

Из уравнения (20б) отыщем величину ψ :

$$\int d\psi=\int dt.$$

$$\psi=t+c.$$

Найденное значение амплитуды a (21) подставляем в уравнение (19). Получаем следующее равенство

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial\psi^2}+u_1=2\sin 3\psi. \tag{22}$$

Найдем функцию u_1. Решение уравнения (22) имеет вид:

$$\tilde{u}_1=c_1\sin 3\psi. \tag{23}$$

Дважды дифференцируем (23) и подставляем в уравнение (22). Получаем равенство:

$$-9c_1\sin 3\psi+c_1\sin 3\psi=2\sin 3\psi.$$

Находим $c_1=-1/4$.

Отсюда имеем, что

$$u_1=-\frac{1}{4}\sin 3\psi.$$

Таким образом, решение уравнения (2) в первом приближении имеет вид:

$$x=2\cos\psi-\frac{\mu}{4}\sin 3\psi.$$

Сравнивая полученный результат с решением уравнения (2) методом Ван-дер-Поля усреднения по времени, приходим к заключению, что они совпадают [2].

---

1. Боголюбов, Н.Н. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний / Н.Н. Боголюбов, Ю.А. Митропольский. – М.: Гос. изд-во физико-математической литературы, 1958. – 408 с.

2. Горяченко, В.Д. Элементы теории колебаний: учебное пособие для студентов высших учебных заведений. – М.: Высш. школа, 2001. – 395 с.