

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЦИРКУЛИРОВАНИЯ СЫПУЧЕЙ СРЕДЫ В КРУГЛОМ БУНКЕРЕ

В статье рассматриваются вопросы повышения эффективности вибрационной обработки поверхности деталей в зависимости от формы бункера. Сравниваются интенсивности перемешивания вибромассы в круглом и U-образном бункере. Исследование проводится на основе механической модели качения круглого цилиндра по шероховатой поверхности стенок бункера.

В результате численного решения уравнений движения получены графические зависимости угловой скорости и положения вибромассы в круглом вибробункере. Делается вывод о сравнительном преимуществе формы круглого бункера, обеспечивающей более интенсивное перемешивание при прочих равных условиях.

In this paper the motion of vibration media as solid cylinder in round volume is considered. This research can be a base of description of lifting and falling of details in processes of working by means of abrasive media.

Вибрационная обработка деталей в абразивной среде состоит в перемешивании общей массы гранул абразива и изделий, при котором происходит сьем материала и упрочнение поверхности изделия. Сыпучая масса в целом совершает круговое перемещение, при котором нижние слои перемещаются вверх, а верхние слои массы опускаются вниз. В работе [1] был рассмотрен случай абразивной обработки в U-образном бункере, где оценивалась интенсивность такого перемещения в зависимости от параметров вибрации, а также от других параметров процесса.

Для исследования вопроса повышения интенсивности вращения круглой массы рассмотрим круговые колебания круглого бункера, загруженного цельной круглой массой. Обозначим: R_1 – радиус круглого днища бункера; $R = R_1 - \delta$ – радиус круглой массы (δ – величина зазора); саму массу считаем круглым сплошным цилиндром, который может перекачиваться с проскальзыванием и без проскальзывания по стенкам бункера, отрываться от стенок, соударяться с ними. Удар считаем абсолютно неупругим, при котором нормальная составляющая относительной скорости точки контакта диска гасится, а касательная – сохраняется. Кроме того, на массу действуют силы аэродинамического сопротивления.

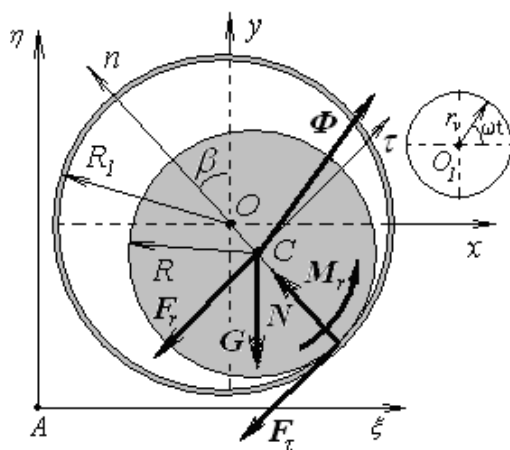


Рис.1. Схема сил, действующих на круглую массу.

Колебания бункера будем характеризовать амплитудой r_v , частотой ω , фазовым углом ωt (t – время),

так что точки бункера будут перемещаться по отношению к неподвижной системе координат $A\xi\eta$, как представлено на рис. 1, по закону:

$$\xi = r_v \cos \omega t, \quad \eta = r_v \sin \omega t. \quad (1)$$

Пусть цилиндр имеет массу M , центральный момент инерции J_C , его положение по отношению к осям Oxy , связанным с бункером, определяется координатами центра масс x_C, y_C и углом поворота ψ . Движение цилиндра может включать три динамически различных этапа: качения без скольжения, качения со скольжением и полет между стенками бункера.

Движение диска на всех этапах подчиняется уравнениям:

$$\begin{aligned} M \ddot{x}_C &= \Phi \cos \omega t - N \sin \beta - F_\tau \cos \beta - F_r \cos \beta, \\ M \ddot{y}_C &= -G + \Phi \sin \omega t + N \cos \beta - F_\tau \sin \beta - F_r \sin \beta, \\ J_C \ddot{\psi} &= -F_\tau R - M_r, \end{aligned} \quad (2)$$

где $\Phi = Mr_v \omega^2$ – модуль вибрационной силы инерции; F_τ – сила трения в точке контакта (считаем, что трение описывается законом Амонтона-Кулона с коэффициентом трения скольжения f); N – нормальная реакция стенки бункера в точке контакта; $F_r = \alpha_1 v_C$ – главный вектор сил аэродинамического сопротивления (α_1 – коэффициент сопротивления); $M_r = \alpha_2 \dot{\psi}$ – момент сил аэродинамического сопротивления (α_2 – коэффициент сопротивления); $G = Mg$ – сила тяжести; β – угол, который составляет радиус-вектор точки контакта с вертикалью.

При качении по круглому днису имеют место кинематические зависимости:

$$\begin{aligned} x_C &= \delta \sin \beta, \quad y_C = -\delta \cos \beta, \\ v_C + \dot{\psi} R &= 0, \quad \dot{x}_C = -\dot{\psi} R \cos \beta, \quad \dot{y}_C = -\dot{\psi} R \sin \beta, \\ \ddot{x}_C &= -\ddot{\psi} R \cos \beta - \dot{\psi}^2 \frac{R^2}{\delta} \sin \beta, \quad \ddot{y}_C = -\ddot{\psi} R \sin \beta + \dot{\psi}^2 \frac{R^2}{\delta} \cos \beta. \end{aligned} \quad (3)$$

С учетом (3) из (2) получаем уравнение качения цилиндра без скольжения

$$(J_C + MR^2) \ddot{\psi} = GR \sin \beta - \Phi R \cos(\omega t - \beta) - (\alpha_2 - \alpha_1 R^2) \dot{\psi} \quad (4)$$

и выражения для нормальной реакции и силы трения:

$$N = M \left(\dot{\psi} \frac{R^2}{\delta} + g \cdot \cos \beta - r_v \omega^2 \sin(\omega t - \beta) \right), \quad (5)$$

$$F_\tau = -\frac{J_C}{J_C + MR^2} (G \sin \beta - \Phi \cos(\omega t - \beta)) + \frac{(J_C \alpha_1 - M \alpha_2)}{J_C + MR^2} R \dot{\psi}. \quad (6)$$

При качении со скольжением кинематические зависимости имеют вид (v_C – алгебраическое значение скорости центра масс цилиндра):

$$x_C = \delta \sin \beta, \quad y_C = -\delta \cos \beta, \quad (7)$$

$$v_C = \dot{x}_C \cos \beta + \dot{y}_C \sin \beta = \dot{\beta} \delta, \quad \dot{x}_C \sin \beta = \dot{y}_C \cos \beta, \quad v_C + \dot{\psi} R \neq 0; \quad (8)$$

при этом движение цилиндра описывается двумя дифференциальными уравнениями:

$$M \dot{v}_C = -Mg \sin \beta + Mr_v \omega^2 \cos(\omega t - \beta) - f N \operatorname{sgn}(v_C + \dot{\psi} R) - \alpha_1 v_C, \quad (9)$$

$$J_C \dot{\psi} = -f N \operatorname{sgn}(v_C + \dot{\psi} R) - \alpha_2 \dot{\psi}; \quad (10)$$

выражение нормальной реакции сохраняется в соответствии с (5):

$$N = M \left(\frac{v_C^2}{\delta} + g \cos \beta - r_v \omega^2 \sin(\omega t - \beta) \right). \quad (11)$$

Введем безразмерные переменные и параметры:

$$\begin{aligned} \tau &= \omega t, \quad \tilde{x}_C = x_C / r_v, \quad \tilde{y}_C = y_C / r_v, \quad \tilde{x}_C'' = \frac{d^2 \tilde{x}_C}{d\tau^2} = \ddot{x}_C / (r_v \cdot \omega^2), \\ \tilde{y}_C'' &= \frac{d^2 \tilde{y}_C}{d\tau^2} = \ddot{y}_C / (r_v \cdot \omega^2), \quad \psi' = \frac{d\psi}{d\tau} = \dot{\psi} / \omega, \quad \psi'' = \frac{d^2 \psi}{d\tau^2} = \ddot{\psi} / \omega^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{\delta} &= \delta/r_v, \quad \tilde{d} = d/r_v, \quad \tilde{R} = R/r_v, \quad j_p = (J_C + MR^2)/(Mr_v^2), \quad j_C = J_C/(Mr_v^2), \\ \tilde{N} &= N/(Mr_v\omega^2), \quad \tilde{F}_\tau = F_\tau/(Mr_v\omega^2), \quad z = g/(r_v\omega^2), \quad \tilde{\alpha}_2 = \alpha_2/(Mr_v^2\omega), \quad \tilde{\alpha}_1 = \alpha_1/(M\omega).\end{aligned}$$

В новых переменных этап качения без скольжения можно описать одной системой уравнений и ограничений (далее «волну» над безразмерными переменными для краткости записи опускаем):

$$\frac{d^2\psi}{d\tau^2} = \frac{R}{j_p}(z\sin\beta - \cos(\tau - \beta)) - \frac{\alpha_2 + \alpha_1 R^2}{j_p} \frac{d\psi}{d\tau}, \quad (12)$$

$$N = \frac{R^2}{\delta} \left(\frac{d\psi}{d\tau} \right)^2 + z\cos\beta - \sin(\tau - \beta), \quad (13)$$

$$F_\tau = -\frac{j_C}{j_p}(z\sin\beta - \cos(\tau - \beta)) + \frac{(j_C\alpha_1 - \alpha_2)}{j_p} R\psi'; \quad (14)$$

$$|F_\tau| < fN, \quad N > 0. \quad (15)$$

Здесь также следует иметь ввиду кинематические зависимости (3).

При условии $N \leq 0$ цилиндр отрывается от стенок бункера, и этап качения переходит в этап полета

$$\psi'' = -\alpha_2\psi', \quad x_C'' = -\alpha_1x_C', \quad y_C'' = -z - \alpha_1y_C'. \quad (16)$$

Продолжительность этапа полета определяется величиной

$$d = \sqrt{x_C^2 + y_C^2},$$

где d – расстояние центра масс цилиндра до центра бункера.

Как только $d \geq \delta$, этап полета заканчивается и наступают этапы качения, если $N > 0$, или новый этап полета, если $N \leq 0$.

Если в состоянии (12)-(15) нарушается условие $|F_\tau| < fN$ при $N > 0$, наступает этап качения со скольжением, который также можно описать одной системой:

$$v_C' = -z\sin\beta + \cos(\tau - \beta) - fN\text{Sgn}(v_C + \psi'R) - \alpha_1v_C, \quad (17)$$

$$j_C\psi'' = -fN\text{Sgn}(v_C + \psi'R) - \alpha_2\psi', \quad (18)$$

$$N = \frac{v_C^2}{\delta} + z\cos\beta + \sin(\tau - \beta). \quad (19)$$

Движение цилиндра подчиняется системе (17)-(19) до тех пор, пока $v_C + \psi'R \neq 0$, $N > 0$, иначе нужно проверять условие (15) и переходить к системе (16), если $N \leq 0$, либо к системе (12)-(14), если

$$v_C + \psi'R = 0, \quad |F_\tau| < fN, \quad N > 0. \quad (20)$$

Всюду при переходе от одного этапа движения к другому конечное кинематическое состояние цилиндра на предыдущем этапе будет определять начальное для последующего этапа. Это обстоятельство делает практически невозможным получение аналитического решения общего вида, быть может, за некоторым исключением для установившихся режимов движения.

Обобщая сказанное, отметим:

а) этап качения без скольжения начинается в момент $\tau = \tau_k$, когда

$$d = d_k = \delta, \quad N = N_k > 0, \quad x_{Ck}'\sin\beta_k - y_{Ck}'\cos\beta_k = 0, \quad (21)$$

либо с начала движения, либо после этапа полета, либо после этапа качения со скольжением; при этом движение подчиняется уравнению (12) и выполняется условие отсутствия проскальзывания в точке контакта

$$x'_c = -R\psi' \cos\beta, \quad y'_c = -R\psi' \sin\beta, \quad |F_\tau| < fN; \quad (22)$$

б) каждый этап полета начинается в момент $\tau = \tau_p$, с начала движения или когда нарушается условие неотрицательности нормальной реакции, $N \geq 0$, во время этапов качения; во время полета движение подчиняется уравнениям (16) и выполняется условие $d < \delta$;

в) каждый этап качения со скольжением начинается в момент $\tau = \tau_s$, когда выполняется (36)

$$d = d_s = \delta, \quad N = N_s > 0, \quad x'_{c_s} \sin\beta_s - y'_{c_s} \cos\beta_s = 0, \quad (23)$$

либо с начала движения, либо после этапа полета, либо после этапа качения без скольжения; при этом движение подчиняется уравнениям (17)-(18) и выполняется условие $v_c + \psi'R \neq 0$.

Рассмотренный алгоритм математической модели реализован в математической среде Mathsoft MathCAD 13, так как решение таких уравнений известными аналитическими методами не представляется возможным.

Из экспериментальных и теоретических исследований закономерностей вибрационной обработки изделий известно, что вибромасса по истечении некоторого промежутка времени приобретает вращательное движение (циркулирует) в направлении, противоположном круговым вибрациям, при котором нижние слои массы перемещаются вверх, а верхние опускаются вниз. При этом обработка поверхностей происходит за счет относительного смещения находящихся в контакте гранул и изделий. Эффективность процесса обработки напрямую зависит от скорости циркулирования вибромассы. Чем интенсивней вращается масса, тем быстрее процесс обработки.

В работе [1] рассмотрено движение вибромассы в U-образном вибробункере, конструкция которого включает круглое днище с вертикальными боковыми стенками. На рис. 2, 3 представлен пример численного решения уравнений движения цилиндра в круглом и U-образном бункере соответственно при заданных значениях параметров:

$$z=0,8, \quad R=49, \quad \delta=1, \quad f=0,3, \quad \alpha_1=0,5, \quad \alpha_2=0,5.$$

На графиках 2 а), 3 а) показано изменение угла поворота цилиндра с течением времени. В соответствии с графиком угол поворота монотонно убывает, что соответствует вращению круглой массы в направлении, противоположном круговым вибрациям.

На рис. 2 б), 3 б) представлено перемещение центра цилиндра относительно центра круглого и U-образного бункера. Перемещение центра по граничной окружности соответствует этапам качения цилиндра по стенкам бункера, а промежуточные (внутренние) линии круга соответствуют этапу полета.

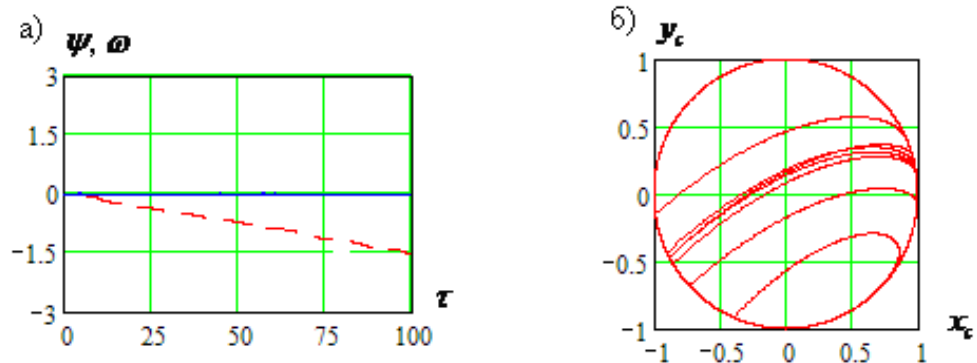


Рис. 2. Пример численного решения уравнений движения цилиндра в круглом бункере.

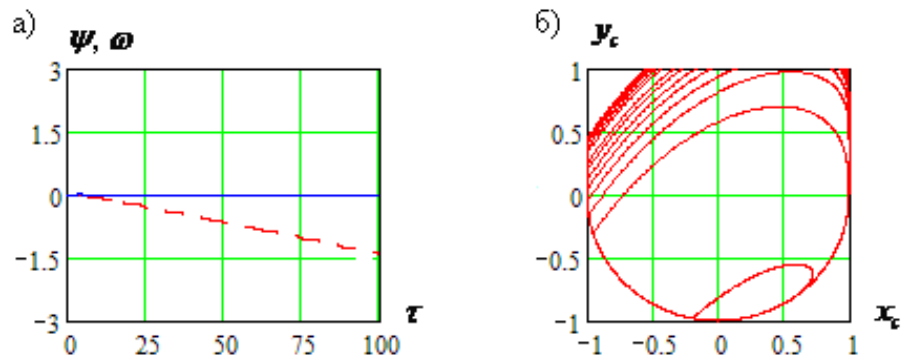


Рис. 3. Пример численного решения уравнений движения цилиндра в U-образном бункере.

Качественно эти графики характеризуют одинаковое поведение вибромассы, однако скорость циркулирования в круглом вибробункере выше (по абсолютной величине), чем в U-образном бункере.

Для более конкретного анализа были рассмотрены изменения параметра перегрузки $z = 0.1 \div 1$ и величины зазора $\delta = 2 \div 10$, при фиксированных остальных: радиуса бункера R , коэффициента трения f и аэродинамических коэффициентов α .

На рис 4 а) представлены графики изменения угла поворота круглой массы с течением времени для круглого и U-образного бункера, где ψ_0 – угол поворота цилиндра в круглом бункере; ψ_U – угол поворота цилиндра в U-образном бункере, более наглядно изменение угла поворота круглой массы с течением времени представлено на рис. 4 б).

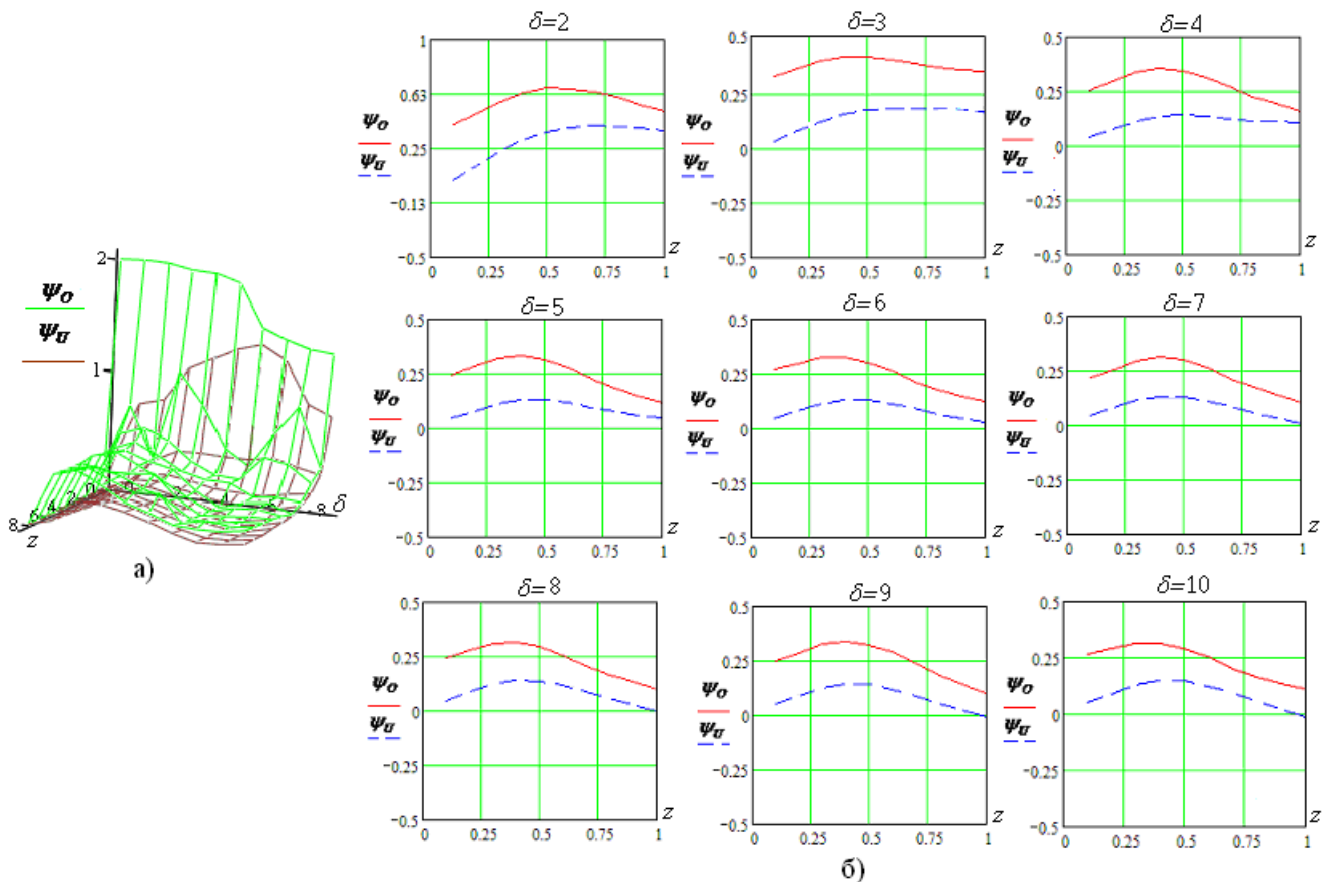


Рис. 4. Изменение угла поворота круглой массы с течением времени: а) трехмерный график; б) при фиксированных δ .

Интересно отметить, что во всех случаях интенсивность вращения имеет выраженный максимум при промежуточном значении z . То есть с ростом интенсивности вибрации

интенсивность вращения сначала возрастает, а затем уменьшается. При величине зазора $\delta = 2$ интенсивность вращения круглой массы в круглом бункере имеет максимум при $z \approx 0,5$, в U-образном бункере – при $z \approx 0,7$. При увеличении величины зазора максимумы смещаются влево. Если зафиксировать δ , а изменить коэффициента трения f , то, как показано на графиках 5 а) и 5 б), максимумы интенсивности вращения смещаются вправо.

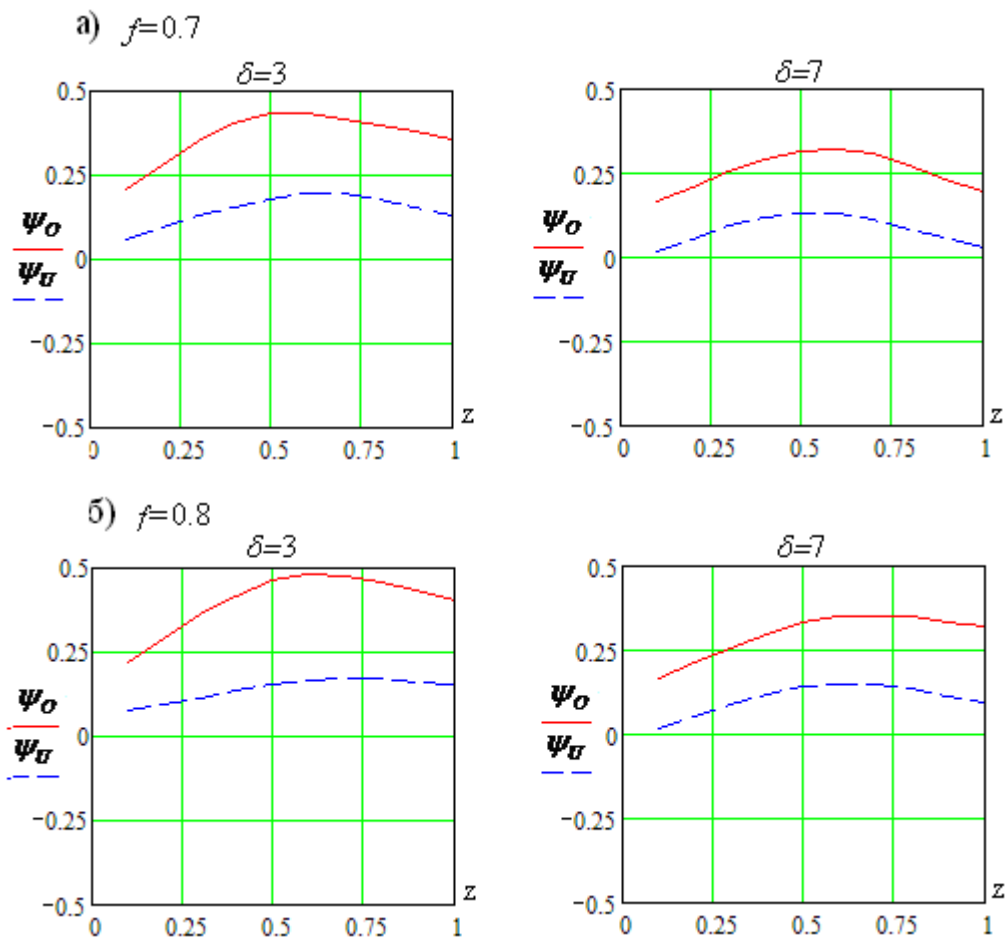


Рис. 5. Изменение угла поворота круглой массы с течением времени при изменении коэффициента трения: а) при $f=0,7$; б) при $f=0,8$.

Таким образом, почти во всех рассмотренных случаях при одинаковом уровне интенсивности вибрации скорость циркулирования вибромассы в круглом бункере будет выше, чем в U-образном. Это должно обеспечить более эффективную обработку поверхности изделий.

-
1. Сельвинский, В.В. Моделирование циркулирования сыпучей среды в U-образном бункере // Вестник АмГУ. – 2007. – № 39. – С. 3-5.
 2. Димов, Ю.В. Обработка деталей свободным абразивом. – Иркутск: Изд-во ИрГТУ, 2000.- 293 с.