Т.В. Труфанова, А.В. Храменкова

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕСТА ПЕНЛЕВЕ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

This article shows using of Painleve's test, which based on finding solution of non-linear differential equation expansion form, which has particularly like a variable pole kind.

Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение n-го порядка:

$$u_z^{(n)} = F(z, u, u_z^{'}, ..., u_z^{(n-1)}). \quad (1)$$

Тест Пенлеве основан на поиске решения уравнения (1) в виде разложения, имеющего особенность типа подвижного полюса:

$$u(z) = \frac{1}{(z-z_0)^p} \sum_{m=0}^{\infty} A_m (z-z_0)^m, \quad (2)$$

где z_0 – любое; p – целое положительное число [1]. Решение (2) должно быть общим, поэтому коэффициенты разложения A_m должны содержать $(n-1)$ произвольных постоянных (в этом случае с учетом произвольности z_0 решение в соответствии с порядком уравнения будет зависеть от n произвольных постоянных). Если решений вида (2) несколько, то все они должны удовлетворять указанным требованиям.

На практике тест Пенлеве удобно проводить последовательно в три этапа.

Первый этап. Сначала определяется главный член разложения (2), который характеризуется показателем степени p и коэффициентом A_0. Для этого в уравнение (1) подставляется одночлен $u = \frac{A_0}{p}, \quad \xi = z - z_0$, а затем обе части полученного выражения умножаются на ξ^{p+n}. В результате в левой части будет стоять константа. Значение p выбирается так, чтобы предельное значение правой части при $\xi \to 0$ также было равно константе (отличной от нуля). После этого приравнивание левой и правой (при $\xi \to 0$) частей позволяет найти коэффициент A_0.

Если все полученные на первом этапе значения p – целые и положительные (это первое необходимое условие для теста Пенлеве), то анализ уравнения (1) можно продолжить. Если хотя бы одно значение p – нецелое или комплексное, то рассматриваемое уравнение не удовлетворяет тесту Пенлеве.

Второй этап. На этом этапе определяются индексы Фукса. Для этого в ведущие члены подставляется $u = A_0\xi^{-p} + A_m\xi^{m-p}$, $\xi = z - z_0$ и определяется множитель k_m, входящий в левую часть соотношений $k_m A_m = \Phi_m(A_0, A_1, ..., A_{m-1})$. Второе необходимое условие для теста Пенлеве: уравнение $k_m = 0$ должно иметь $n-1$ различных целых неотрицательных корней, т.е. должно иметь место представление

$$k_m = (m+1)(m-m_1)...(m-m_{n-1}), \quad 0 \le m_1 < m_2 < ... < m_{n-1},$$

где m_j – целые числа. Если это условие выполнено, то переходят к третьему этапу.

Если уравнение $k_m = 0$ имеет нецелые, отрицательные целые (кроме $m = -1$) или комплексные корни, то рассматриваемое уравнение не удовлетворяет тесту Пенлеве и на этом анализ заканчивается.

Третий этап. На этом этапе проверяется одновременное выполнение условий $k_m = 0$, $\Phi_m(A_0, A_1, ..., A_{m-1}) = 0$ и последовательно вычисляются коэффициенты разложения A_m до значения $m = m_{n-1}$ включительно. Если при каком-то $m_j \le m_{n-1}$ условие $k_m = 0$, $\Phi_m(A_0, A_1, ..., A_{m-1}) = 0$ не выполняется, то уравнение не удовлетворяет тесту Пенлеве [2].

Продемонстрируем применение теста Пенлеве на примере нелинейного дифференциального уравнения третьего порядка.

$$u'''_{zzz} - 6uu'_z - zu'_z - 2u = 0. \tag{3}$$

Первый этап. Для определения главного члена разложения (1), который характеризуется показателем степени p и коэффициентом A_0, подставляя в уравнение (3) одночлен

$$u = \frac{A_0}{\xi^p}, \quad \xi = z - z_0 \tag{4}$$

и все входящие в это уравнение производные

$$u'_z = -pA_0\xi^{-p-1},$$

$$u''_{zz} = p(p+1)A_0\xi^{-p-2},$$

$$u'''_{zzz} = -p(p+1)(p+2)A_0\xi^{-p-3},$$

получаем

$$-p(p+1)(p+2)A_0\xi^{-p-3} + 6A_0^2 p\xi^{-2p-1} + (\xi + z_0)pA_0\xi^{-p-1} - 2A_0\xi^{-p} = 0.$$

Затем данное выражение умножаем на ξ^{p+3} (произведение $\xi^{p+3}u'''_{zzz}$ дает величину нулевого порядка). Имеем

$$-p(p+1)(p+2)A_0 + 6A_0^2 p\xi^{-p+2} + (\xi + z_0)pA_0\xi^2 - 2A_0\xi^3 = 0. \tag{5}$$

При $\xi \to 0 \quad (p > 0)$ в правой части ненулевой вклад может дать только первый член $6A_0^2 p\xi^{2-p}$. Для того, чтобы он был равен константе, надо положить $p = 2$. В таком случае из (5) при $\xi \to 0$ находим A_0:

$$-2(2+1)(2+2)A_0 + 6 \cdot 2A_0^2 = 0 \;\Rightarrow\; A_0 = 2.$$

Так как p – целое положительное число, то уравнение (3) удовлетворяет первому необходимому условию теста Пенлеве.

Второй этап. Найдем индексы Фукса для уравнения (3). Подставив двучлен $u = A_0\xi^{-p} + A_m\xi^{m-p}$, $\xi = z - z_0$ с учетом значений A_0, p и его производные до третьего порядка

$$u = 2\xi^{-2} + A_m\xi^{m-2},$$

$$u'_z = -4\xi^{-3} + (m-2)A_m\xi^{m-3},$$

$$u''_{zz} = 12\xi^{-4} + (m-2)(m-3)A_m\xi^{m-4},$$

$$u'''_{zzz} = -48\xi^{-5} + (m-2)(m-3)(m-4)A_m\xi^{m-5},$$

в ведущие члены уравнения (3)

$$u'''_{zzz} - 6uu'_z = 0,$$

имеем

$$-48\xi^{-5} + (m-2)(m-3)(m-4)A_m\xi^{m-5} - 6(-8\xi^{-5} + 2(m-2)A_m\xi^{m-5} - 4A_m\xi^{m-5} + (m-2)A_m^2\xi^{m-5}) = 0.$$

После элементарных преобразований получаем

$$A_m\xi^{m-5}((m-2)(m-3)(m-4) - 12(m-2) + 24) + O(A_m^2) = 0.$$

Из квадратного уравнения

$$k_m = (m+1)(m-4)(m-6) = 0$$

находим коэффициенты Фукса (отличные от -1): $m_1 = 4$, $m_2 = 6$. Поскольку они – целые и положительные, то уравнение (3) удовлетворяет второму необходимому условию теста Пенлеве.

Третий этап. На этом этапе подставляем в уравнение разложение

$$u = 2\xi^{-2} + A_1\xi^{-1} + A_2 + A_3\xi + A_4\xi^2 + \dots,$$

в котором надо учесть только пять слагаемых (до члена, пропорционального A_4, что следует из второго этапа) с учетом значений производных.

$$u'_z = -4\xi^{-3} - A_1\xi^{-2} + A_3 + 2A_4\xi + \dots,$$

$$u''_{zz} = 12\xi^{-4} + 2A_1\xi^{-3} + 2A_4 + \dots,$$

$$u'''_{zzz} = -48\xi^{-5} - 6A_1\xi^{-4} + \dots.$$

Получаем

$$-48\xi^{-5} - 6A_1\xi^{-4} - 6(2\xi^{-2} + A_1\xi^{-1} + A_2 + A_3\xi + A_4\xi^2 + \dots)(-4\xi^{-3} - A_1\xi^{-2} + A_3 + 2A_4\xi + \dots) -$$
$$-(\xi + z_0)(-4\xi^{-3} - A_1\xi^{-2} + A_3 + 2A_4\xi + \dots) - 2(2\xi^{-2} + A_1\xi^{-1} + A_2 + A_3\xi + A_4\xi^2 + \dots) = 0.$$

Далее «соберем» члены при одинаковых степенях ξ, а затем приравниваем нулю коэффициенты при степенях ξ. Имеем систему алгебраических уравнений для определения A_m:

$$\xi^{-4}: -6A_1 + 12A_1 + 24A_1 = 0 \Rightarrow A_1 = 0,$$

$$\xi^{-3}: 6A_1^2 + 24A_2 + 4z_0 = 0 \Rightarrow A_2 = -\frac{z_0}{6},$$

$$\xi^{-2}: -12A_3 + 6A_1A_2 + 24A_3 + A_1z_0 + 4 - 4 = 0 \Rightarrow A_3 = 0,$$

$$\xi^{-1}: -24A_4 - 6A_1A_3 + 6A_1A_3 + 24A_4 + A_1 - 2A_1 = 0 \Rightarrow A_4 \times 0 = 0.$$

В этом случае значение A_4 – любое.

Все три проверенные этапа показали, что данное нелинейное дифференциальное уравнение удовлетворяет тесту Пенлеве, а значит, имеет решение вида (2).

А теперь определим, при каких значениях параметров a, b, c нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка удовлетворяет тесту Пенлеве.

Рассмотрим уравнение

$$u''_{zz} - auu'_z = bu^2 + cz^3. \tag{6}$$

Первый этап. Для определения главного члена разложения (1), который характеризуется показателем степени p и коэффициентом A_0, подставляем в уравнение (6) одночлен (4). После элементарных преобразований получаем:

$$u'_z = -pA_0\xi^{-p-1},$$

$$u''_{zz} = p(p+1)A_0\xi^{-p-2},$$

$$p(p+1)A_0\xi^{-p-2} - aA_0\xi^{-p}(-pA_0\xi^{-p-1}) = b(A_0\xi^{-p})^2 + c(\xi + z_0)^3,$$

$$p(p+1)A_0\xi^{-p-2} + apA_0^2\xi^{-2p-1} = bA_0^2\xi^{-2p} + c(\xi + z_0)^3.$$

Затем полученное выражение умножим на ξ^{p+2} (произведение $\xi^{p+2}u''_{zz}$ дает величину нулевого порядка). Имеем

$$p(p+1)A_0 = -apA_0^2\xi^{-p+1} + bA_0^2\xi^{-p+2} + c(\xi + z_0)^3\xi^{p+2}. \qquad (7)$$

При $\xi \to 0 \quad (p > 0)$ в правой части ненулевой вклад могут дать только первый и второй члены уравнения. Для того, чтобы они были равными константе, надо положить в первом случае $p = 1$ и $b = 0$, а во втором случае – $a = 0$ и $p = 2$.

Рассмотрим первый случай. Из (7) находим A_0:

$$2A_0 + aA_0^2 = 0 \;\Rightarrow\; A_0 = -\frac{2}{a}.$$

Так как p – целое положительное число, то уравнение (6) удовлетворяет первому необходимому условию теста Пенлеве.

Второй этап. Найдем индексы Фукса для уравнения (6), подставив двучлен $u = A_0\xi^{-p} + A_m\xi^{m-p}$, $\xi = z - z_0$ и его производные до второго порядка с учетом значений A_0, p в ведущие члены уравнения (6):

$$u''_{zz} - auu'_z = 0.$$

$$u = -\frac{2}{a}\xi^{-1} + A_m\xi^{m-1},$$

$$u'_z = \frac{2}{a}\xi^{-2} + (m-1)A_m\xi^{m-2},$$

$$u''_{zz} = -\frac{4}{a}\xi^{-3} + (m-1)(m-2)A_m\xi^{m-3}.$$

$$-\frac{4}{a}\xi^{-3} + (m-1)(m-2)A_m\xi^{m-3} - a(-\frac{2}{a}\xi^{-1} + A_m\xi^{m-1})(\frac{2}{a}\xi^{-2} + (m-1)A_m\xi^{m-2}) = 0.$$

После элементарных преобразований получаем

$$A_m\xi^{m-3}((m-1)(m-2) + 2(m-1) - 2) + O(A_m^2) = 0.$$

Из квадратного уравнения

$$k_m = (m+1)(m-2) = 0$$

находим коэффициенты Фукса (отличные от -1): $m_1 = 2$. Поскольку m_1 – целое и положительное, то уравнение (6) удовлетворяет второму необходимому условию теста Пенлеве.

Третий этап. Подставляем в уравнение разложение

$$u = -\frac{2}{a}\xi^{-1} + A_1 + A_2\xi + \ldots,$$

в котором надо учесть только три слагаемых (до члена, пропорционального A_2, что следует из второго этапа), с учетом производных

$$u_z^{'} = \frac{2}{a}\xi^{-2} + A_2 + \dots,$$

$$u_{zz}^{''} = -\frac{4}{a}\xi^{-3} + \dots.$$

Получаем: $$-\frac{4}{a}\xi^{-3} + \dots - a(-\frac{2}{a}\xi^{-1} + A_1 + A_2\xi + \dots)(\frac{2}{a}\xi^{-2} + A_2 + \dots) = c(\xi + z_0)^3.$$

Далее «соберем» члены при одинаковых степенях ξ, а затем приравниваем нулю коэффициенты при степенях ξ. Получим систему алгебраических уравнений для определения A_m:

$$\xi^{-2} : -a\frac{2}{a}A_1 = 0 \Rightarrow A_1 = 0,$$

$$\xi^{-1} : a\frac{2}{a}A_2 - a\frac{2}{a}A_2 = 0 \Rightarrow A_2 \times 0 = 0. \qquad (8)$$

Если $b = 0$, $a \neq 0$, а c – любое, то уравнение (6) удовлетворяет тесту Пенлеве, а его решение может быть представлено в виде разложения $u = -\frac{2}{a}\xi^{-1} + A_1 + A_2\xi + \dots$, которое содержит две произвольные постоянные z_0 и A_2; при этом первые два коэффициента определяются по формулам (8), а коэффициенты $A_3, A_4, A_5 \dots$ могут быть определены последовательно из рекуррентных соотношений.

Рассмотрим теперь второй случай при $a = 0$ и $p = 2$. Из (7) находим A_0:

$$6A_0 = bA_0^2 \Rightarrow A_0 = \frac{6}{b}.$$

Так как p – целое положительное число, то уравнение (6) удовлетворяет первому необходимому условию теста Пенлеве.

Второй этап. Найдем индексы Фукса для уравнения (6). Подставив двучлен $u = A_0\xi^{-p} + A_m\xi^{m-p}$, $\xi = z - z_0$ и его производные до второго порядка, с учетом значений A_0, p в ведущие члены уравнения (6).

$$u_{zz}^{''} = bu^2.$$

$$u = \frac{6}{b}\xi^{-2} + A_m\xi^{m-2},$$

$$u_z^{'} = -\frac{12}{b}\xi^{-3} + (m-2)A_m\xi^{m-3},$$

$$u_{zz}^{''} = \frac{36}{b}\xi^{-4} + (m-2)(m-3)A_m\xi^{m-4}.$$

$$\frac{36}{b}\xi^{-4} + (m-2)(m-3)A_m\xi^{m-4} = b(\frac{6}{b}\xi^{-2} + A_m\xi^{m-2})^2,$$

После элементарных преобразований получаем

$A_m \xi^{m-3}((m-2)(m-3)-12)+O(A_m^2)=0$.

Из квадратного уравнения

$k_m=(m+1)(m-6)=0$

находим коэффициенты Фукса (отличные от -1): $m_1=6$. Поскольку m_1 – целое и положительное, то уравнение (6) удовлетворяет второму необходимому условию теста Пенлеве.

Третий этап. Подставляем в уравнение разложение

$$u=\frac{6}{b}\xi^{-2}+A_1\xi^{-1}+A_2+A_3\xi+A_4\xi^2+A_5\xi^3+A_6\xi^4+\ldots,$$

в котором надо учесть только семь слагаемых (до члена, пропорционального A_6, что следует из второго этапа) с учетом производных

$$u_z^{'}=-\frac{12}{b}\xi^{-3}-A_1\xi^{-2}+A_3+2A_4\xi+3A_5\xi^2+4A_6\xi^3+\ldots,$$

$$u_{zz}^{''}=\frac{36}{b}\xi^{-4}+2A_1\xi^{-3}+2A_4+6A_5\xi+12A_6\xi^2+\ldots$$

Получаем

$$\frac{36}{b}\xi^{-4}+2A_1\xi^{-3}+2A_4+6A_5\xi+12A_6\xi^2+\ldots=$$

$$=b\left(\frac{6}{b}\xi^{-2}+A_1\xi^{-1}+A_2+A_3\xi+A_4\xi^2+A_5\xi^3+A_6\xi^4+\ldots\right)^2+c(\xi^3+3\xi^2z_0+3\xi z_0^2+z_0^3).$$

Далее «соберем» члены при одинаковых степенях ξ, а затем приравниваем нулю коэффициенты при степенях ξ. Имеем систему алгебраических уравнений для определения A_m:

$$\xi^{-3}: 2A_1=12A_1 \Rightarrow A_1=0,$$

$$\xi^{-2}: A_1^2b+12A_2=0 \Rightarrow A_2=0,$$

$$\xi^{-1}: 2bA_1A_2+12A_3=0 \Rightarrow A_3=0, \quad (9)$$

$$1: 2A_4=bA_2^2+2bA_1A_3+12A_4+cz_0^3 \Rightarrow A_4=-\frac{cz_0^3}{10},$$

$$\xi: 6A_5=2bA_2A_3+2bA_1A_4+12A_5+3cz_0^2 \Rightarrow A_5=-\frac{cz_0^2}{2},$$

$$\xi^2: 12A_6=12A_6+2bA_1A_5+2bA_2A_4+A_3^2b+3cz_0 \Rightarrow A_6\times 0+3cz_0=0.$$

Если $a=c=0$, $b\neq 0$, то уравнение (6) удовлетворяет тесту Пенлеве, а его решение может быть представлено в виде разложения $u=\frac{6}{b}\xi^{-2}+A_1\xi^{-1}+A_2+A_3\xi+A_4\xi^2+A_5\xi^3+A_6\xi^4+\ldots$, которое содержит две произвольные постоянные – z_0 и A_6; при этом первые пять коэффициентов определяются по формулам (9), а коэффициенты $A_7, A_8, A_9\ldots$ могут быть определены последовательно из рекуррентных соотношений.

Данный тест Пенлеве применим также к нелинейным дифференциальным уравнениям в частных производных, которые при помощи преобразований Коула-Хопфа приводятся к линейным дифференциальным уравнениям в частных производных.

1. Еругин Н.П. Проблема Римана. – Минск: Наука и техника, 1982. – 336 с.

2. Полянин А.Д., Зайцев В.Ф., Журов А.И. Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 256 с.