**М.Б. Гунькина, А.В. Бушманов**

# ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ФИКСИРУЮЩЕГО УСТРОЙСТВА ДЛЯ ЛЕЧЕНИЯ ТАЗОВОГО КОЛЬЦА

***The article is devoted to simulation locking device for the treatment of pelvic ring.***

## Введение

Моделирование многочисленных физических, биологических и химических явлений часто приводит к решению линейных или нелинейных уравнений или систем уравнений в частных производных. Существуют традиционные математические средства, позволяющие получить решение в определенных случаях, но для решения конкретных проблем, возникающих в науке и технике, невозможно обойтись без использования численных методов. С ростом производительности ЭВМ численное моделирование приобретает особое значение, так как позволяет дополнить или даже заменить прямой эксперимент.

Среди численных методов решения задач по моделированию, получивших наибольшее распространение, ведущее положение занимает метод конечных элементов (МКЭ). Его отличает широкая область применения, инвариантность по отношению к геометрии конструкции и физическим характеристикам материалов, относительная простота учета взаимодействия конструкций с окружающей средой (механические, температурные, коррозионные воздействия, граничные условия и т.д.), высокая степень приспособляемости к автоматизации всех этапов расчета.

## Постановка задачи

Целью разработки имитационной модели фиксирующего устройства при лечении перелома тазовой кости является исследование поведения системы «кость – фиксирующие устройство» на основе результатов анализа наиболее существенных взаимодействий между ее элементами.

Моделирование пространственных конструкций типа «фиксирующее устройство» в медицине – довольно трудоемкая техническая задача. Ее решение требует от конструктора значительных усилий и профессиональных навыков. Основные сложности при моделировании фиксирующих конструкций – разнообразное сочетание геометрических размеров и форм стержней, большой диапазон вектора действующих на конструкцию сил, наличие регулировочных узлов и др.

Для имитационного моделирования деформации в качестве фиксирующей конструкции выбран аппарат для перелома тазовой кости. Аппарат представляет собой жесткую каркасную конструкцию, состоящую из дуг и спиц, фиксируемых на стойках, закрепленных в тазовой кости.

Схема конструкции фиксирующего устройства для лечения тазового кольца представлена на рис. 1.

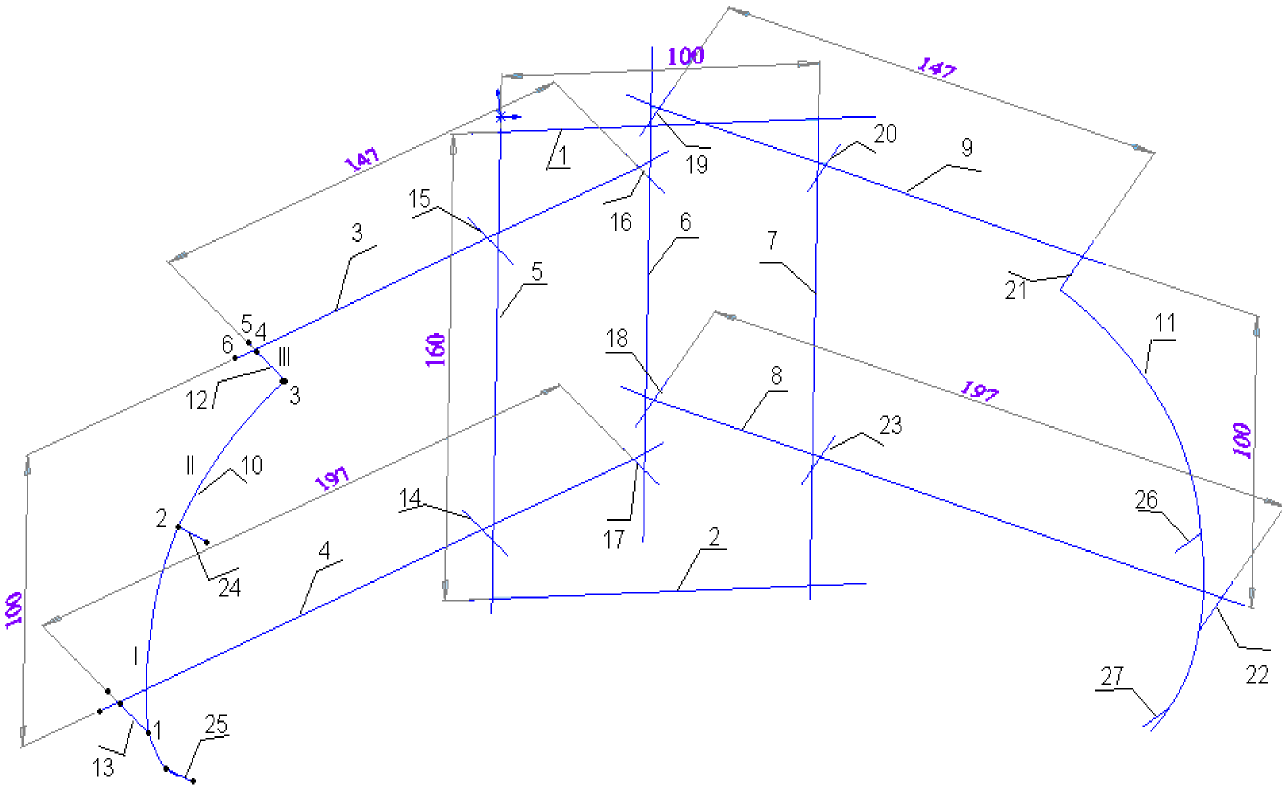


*Рис. 1.* Схема фиксирующего устройства.

Конструкция сделана из нержавеющей стали, модуль Юнга (упругости) равен $2{,}1\times10^{10}$ (Н/м$^2$).

Фиксирующее устройство состоит из двух полуколец (10 и 11), имеющих в сечении прямоугольник шириной 25 мм и высотой 5 мм. Элементы 1 и 2 имеют в сечении прямоугольник шириной 5 мм и высотой 15 мм. В конструкции семь спиц (3 – 9) и четыре стержня (24 – 26) с сечением круга диаметром 4 мм. Элементы с 12 по 23 имеют в сечении прямоугольник шириной 15 мм и высотой 25 мм.

Стержни 26 и 27 жестко закреплены, а на стержни 24 и 25 действует сила в 100 Н.

**Алгоритм расчета конструкции методом конечных элементов**

1. Построение матрицы жесткости Ri' в местной системе координат для некоторого j -го стержня.

2. Преобразование матрицы Ri' в матрицу жесткости i -го стержня в общей системе координат Ri.

3. Формирование матрицы жесткости всей конструкции R (поэлементное суммирование матрицы Ri с матрицей жесткости R).

4. Учет граничных условий.

5. Формирование вектора узловых нагрузок P.

6. Решение системы уравнений RZ = P.

7. Вычисление внутренних усилий в каждом стержне.

## Определение матрицы жесткости стержня

Каждый стержень в конструкции имеет свою ориентацию. Поэтому при расчете вводятся понятия местной, или локальной (связанной с осью стержня), и общей для всей конструкции систем координат. Представим исходную конструкцию в виде конечных элементов. Рассматривая действие приложенных сил и конструкцию балки, целесообразно задать 37 конечных элементов и соответственно 42 узла. Узлы обозначим цифрами от 1 до 42, номера элементов обозначим римскими цифрами на рисунке 1. Чтобы не загромождать рисунок, обозначим только несколько конечных элементов и узлов.

Устанавливается следующее правило знаков: положительная реакция совпадает с положительным направлением соответствующего перемещения и наоборот.

Полученная таким образом матрица жесткости имеет вид:

$$k\_lok(L) := \begin{pmatrix} \frac{E\cdot A}{L} & 0 & 0 & \frac{E\cdot A}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12E\cdot I}{L^3} & \frac{6E\cdot I}{L^2} & 0 & \frac{12E\cdot I}{L^3} & \frac{6E\cdot I}{L^2} \\ 0 & \frac{6E\cdot I}{L^2} & \frac{4E\cdot I}{L} & 0 & \frac{6E\cdot I}{L^2} & \frac{2E\cdot I}{L} \\ \frac{E\cdot A}{L} & 0 & 0 & \frac{E\cdot A}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12E\cdot I}{L^3} & \frac{6E\cdot I}{L^2} & 0 & \frac{12E\cdot I}{L^3} & \frac{6E\cdot I}{L^2} \\ 0 & \frac{6E\cdot I}{L^2} & \frac{2E\cdot I}{L} & 0 & \frac{6E\cdot I}{L^2} & \frac{4E\cdot I}{L} \end{pmatrix}, \qquad (1)$$

где E – модуль упругости, Н/м$^2$; L – длина элемента, м; A – площадь поперечного сечения, м$^2$; I – момент инерции, м$^4$.

Длина конечного элемента L в матрице (1) подсчитывается по формуле:

$$L = \sqrt{(x_K - x_H)^2 + (y_K - y_H)^2}\ , \qquad (2)$$

где $x_н$, $y_н$ и $x_к$,$y_к$ – координаты соответственно начального и конечного узлов конечного элемента.

Матрицу (1) можно записать в сокращенном виде, разделив ее на четыре блока размерностью 3×3:

$$R_i^{'} = \begin{bmatrix} R_{HH}^{'} & R_{HK}^{'} \\ R_{KH}^{'} & R_{KK}^{'} \end{bmatrix} \qquad (3)$$

Каждый блок в (3) представляет собой матрицу реакций, возникающих в начале и конце стержня, что отмечено соответственно буквами «Н» и «К». Вторая буква индекса указывает, смещением каких связей – начальных или конечных – вызваны эти реакции. Например, $R'_{кн}$ – это блок реакций на конце от смещения связей в начале стержня.

Поскольку конечные элементы в конструкции расположены произвольным образом, возникает необходимость перехода от матрицы жесткости $R_i^{'}$, построенной в локальной системе координат, к матрице жесткости $R_i$, определенной в глобальной системе координат.

Для перехода к последней используется матрица трансформации.

Преобразование можно произвести по следующей формуле:

$$R_i = V^T R_i^{'} V. \qquad (4)$$

В формуле (4) V представляет собой матрицу перехода из одной ортогональной системы координат в другую.

Отметим, что при решении нашей задачи в дальнейшем возникнет вопрос о преобразовании вектора перемещений для отдельного элемента, но уже из глобальной системы координат в локальную, которое производится по следующей формуле:

$$Z_i^{'} = VZ_i. \tag{5}$$

Матрица V , входящая в формулы (4) и (5) и позволяющая произвести оба преобразования, имеет вид:

$$\mathrm{V} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{6}$$

Угол α в матрице (6) – это угол наклона рассматриваемого стержня к оси общей системы координат.

Значения sin α и cos α вычисляются через координаты узлов конечного элемента по формулам:

$$\sin\alpha = \frac{y_K - y_H}{\sqrt{(x_K - x_H)^2 + (y_K - y_H)^2}},$$
$$\cos\alpha = \frac{x_K - x_H}{\sqrt{(x_K - x_H)^2 + (y_K - y_H)^2}}. \tag{7}$$

Матрицу V можно записать в блочной форме:

$$V = \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix};\ C = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{8}$$

Матрица V (6) и является матрицей трансформации.

Общая матрица жесткости R может быть получена путем суммирования соответствующих элементов матриц жесткости отдельных стержней. Размерность матрицы R – 3n×3n, где n – количество узлов в конструкции.

Мы определили, что наша конструкция имеет 42 узла и 37 стержней (рис. 2). Предположим, что для каждого стержня построена матрица жесткости в общей системе координат. Запишем ее в блочной форме:

$$\mathrm{R_i} = \begin{bmatrix} \mathrm{R_{НН}} & \mathrm{R_{НК}} \\ \mathrm{R_{КН}} & \mathrm{R_{КК}} \end{bmatrix} \tag{9}$$

Рассматривая стержень в составе всей конструкции, можно привести в соответствие индексам «Н» и «К» реальные номера узлов начала и конца стержня. Условимся номер узла, меньший по величине, считать началом стержня, а бóльший – концом.

Теперь задача сводится к тому, чтобы из блоков матрицы $\mathrm{R_i^{'}}$ для каждого стержня сформировать матрицу жесткости всей конструкции R, в нашем случае имеющую размер 126×126.

Так как с каждым узлом связаны три перемещения, всю матрицу R удобно представить в блочной форме с размером блока 3×3. В нашем случае такая матрица будет иметь размерность 42×42.

Для наглядности представим, что формирование матрицы жесткости всей конструкции будет происходить путем суммирования отдельных матриц, имеющих тот же порядок, что и результирующая матрица R, где будут присутствовать только элементы, соответствующие одному стержню, а остальные – нулевые. Разумеется, делать это в программе нецелесообразно, так как расходуется большое количество памяти. Реально формирование матрицы R происходит путем засылки с суммированием соответствующих блоков матрицы жесткости одного стержня $R_i^{'}$ на соответствующее место в матрице R. Но для наглядности будем формировать каждый раз матрицу полного объема, записывая ее в блочном виде.

Рассмотрим последовательно все стержни – с первого до последнего. Номера стержней обозначены на рис. 1 римскими цифрами.

Составим матрицы жесткости для стержней 3 и 2, которые являются элементами матрицы жесткости всей конструкции.

Стержень 3. Начало стержня – в узле 3, конец – в узле 4. Таким образом, индексу «н» соответствует 3, а индексу «к» – 4.

Слагаемое матрицы жесткости всей конструкции R, полученное в результате рассмотрения первого стержня, имеет вид:

$$\Delta R^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & n \\ 0 & 0 & R_{33}^3 & R_{34}^3 & n \\ 0 & 0 & R_{43}^3 & R_{44}^3 & n \\ n & n & n & n & n \end{bmatrix}$$

Стержень 2. Начало – в узле 2, конец – в узле 3.

$$\Delta R^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & n \\ 0 & R_{22}^2 & R_{23}^2 & 0 & n \\ 0 & R_{32}^2 & R_{33}^2 & 0 & n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & n \\ n & n & n & n & n \end{bmatrix}$$

Верхние индексы 3 и 2 указывают, что соответствующие блоки взяты из матриц жесткости, составленных для стержней 3 и 2.

Таким же образом выполняется обработка всех остальных стержней.

Просуммировав все полученные составляющие $\Delta R_i$, получим общую матрицу жесткости конструкции.

Однако матрица R, сформированная указанным способом, получена без учета опорных закреплений. Такая матрица соответствует конструкции, «висящей в воздухе» и не закрепленной от перемещений как жесткого целого.

Формирование вектора нагрузок – один из самых простых этапов алгоритма. Вектор P имеет размерность 3 n. Представим его в блочном виде. Каждому узлу соответствует блок из трех элементов (n – номер узла):

$F_{nx}$ – составляющая нагрузки вдоль оси x для i-го узла;

$F_{ny}$ – составляющая нагрузки вдоль оси y для i-го узла;

$M_n$ – момент, действующий на i-й узел.

Чтобы найти неизвестные узловые перемещения в стержневой системе от действующих нагрузок, необходимо решить систему алгебраических уравнений, в которой коэффициентами при неизвестных являются элементы матрицы жесткости всей конструкции R, а вектор правых частей – вектор нагрузок P:

$$PZ=P. \qquad (10)$$

Систему уравнений (10) можно решить любым доступным способом. Обычно для этой цели используется метод Гаусса.

В результате решения системы уравнений (10) получаем вектор перемещений Z в общей системе координат; размерность вектора соответствует вектору P и равна 3n.

**Численное решение задачи**

При вычислении усилий в конечном элементе необходимо сформировать для него вектор перемещений $Z_i$. Его размерность равна 42, составляющими являются перемещения концевых сечений. Формирование вектора $Z_i$ производится путем выборки из вектора Z для всей конструкции элементов, соответствующих номерам узлов начала и конца рассматриваемого стержня.

Чтобы получить вектор концевых усилий в местной системе координат, необходимо предварительно преобразовать вектор $Z_i$ из общей системы координат в местную по формуле (5).

С помощью матрицы жесткости конечного элемента $R_i'$ определим вектор концевых усилий (реакций) для каждого стержня в местной системе координат:

$$r_i' = R_i' Z_i' r_i'. \tag{11}$$

Физический смысл (11) легко понять. В самом деле, элементы строк матрицы $R_i'$ представляют собой реакции на концах стержня по соответствующим направлениям от всех единичных перемещений. Умножив поэлементно единичную реакцию на соответствующее реальное перемещение и просуммировав полученные слагаемые (в соответствии с правилом умножения матрицы на вектор), получим окончательное значение усилия по данному направлению. Компонентами вектора $r_i'$ являются продольное усилие, поперечное усилие и изгибающий момент в начальном и конечном узлах стержня, действующие по направлениям соответствующих перемещений.

Для проведения конечно-элементного анализа конструкции, состоящей из полуколец, спиц и стержней, расчеты были проведены в программном комплексе ANSYS 11.

С целью определить деформации аппарата под действием заданной нагрузки проводим линейный конечно-элементный анализ конструкции. Методом конечных элементов рассчитаны возможные деформации твердотельной трехмерной модели под действием внешних сил. Результат расчета деформации системы «кость – фиксирующее устройство» показан на рис. 3.

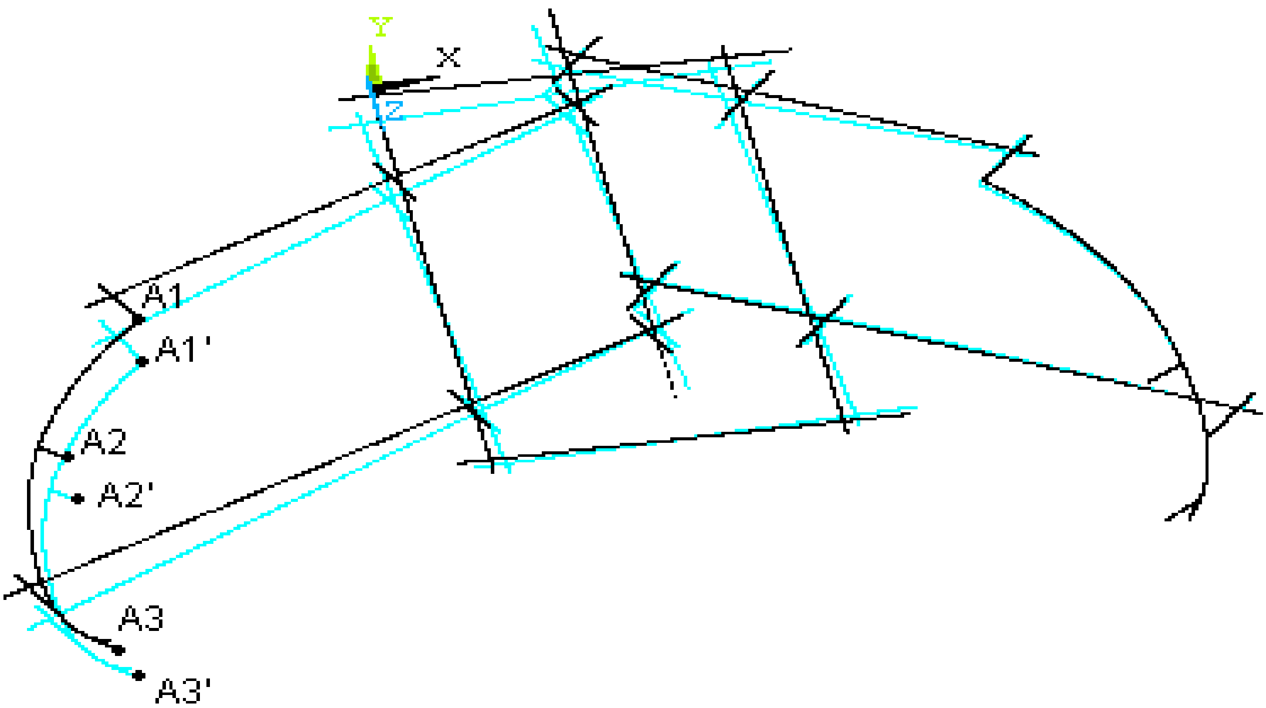


*Рис. 3.* Напряженно-деформированное состояние конструкции.

## Анализ результатов

Проведенное имитационное моделирование показало, что под действием приложенных сил, 100(Н), конструкция фиксирующего устройства деформировалась из точек А1, А2 и А3 в точки А1', А2' и А3'. Анализ напряженно-деформированного состояния конструкции свидетельствует: та часть, которая была зафиксирована по всем осям координат, осталась неподвижной, а та, на которую были приложены силы по оси Z, деформировалась. Наибольшее смещение конструкции произошло в той части, на которую были приложены силы; смещение составило 10 мм.

## Заключение

Разработанная в программной среде ANSYS имитационное моделирование смешения элементов конструкции дает возможность максимально эффективно решать задачи рационального проектирования и расчета фиксирующих устройств для травматологии.

Проведен анализ прочностных характеристик и напряженно-деформированного состояния конструкции. Для анализа напряженно-деформированного состояния конструкции фиксирующего устройства использовался метод конечных элементов.

---

Басов К.А. ANSYS: Справочник пользователя. – М.: ДМК Пресс, 2005.
Розин Л.А. Метод конечных элементов. – СПб., 2000.
Розин Л.А. Стержневые системы как системы конечных элементов. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1976.