

Математика. Прикладная математика. Механика

В.В. Сельвинский

СДВИГ С МЕСТА ТВЕРДОГО ТЕЛА С РАСПРЕДЕЛЕННЫМ КОНТАКТОМ

*This article deals with the conditions of shift of solid body, based on a rough plane.
There is an example of the solving of problem of rotation centre of solid for beginning motion.*

Одной из основных задач вибрационного перемещения является взаимодействие твердого тела с шероховатой плоскостью. Относительное безотрывное движение плоского твердого тела по шероховатой плоскости может содержать этапы относительного покоя, поворота вокруг неподвижной точки и плоского сдвига. В общем случае эти этапы могут чередоваться в зависимости от внешних сил, вызывающих данное движение. Для полноты исследования движения необходимо определить условия и моменты перехода от одного этапа движения к другому. Наиболее сложным здесь представляется решение задачи о сдвиге твердого тела с места. Даже в случае минимально возможного трехточечного контакта эта задача становится статически неопределенной и требует более совершенного математического подхода по сравнению с традиционными уравнениями статики.

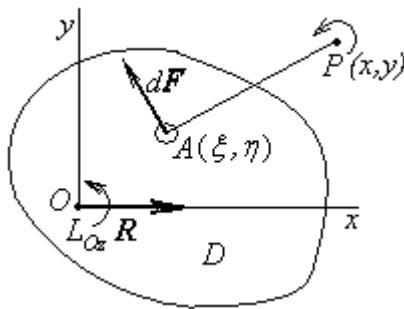


Рис. 1. Схема формирования сил трения при повороте вокруг центра $P(x, y)$.

Пусть контакт твердого тела с шероховатой плоскостью происходит в области D и характеризуется функцией давления $p(t, \xi, \eta)$, зависящей от времени t и координат ξ, η точек области D в системе координат Oxy , связанной с телом (рис.

1). Любое элементарное перемещение тела является поворотом вокруг некоторого мгновенного центра вращения $P(x, y)$. Специфика сил сухого трения состоит в том, что сдвиг первоначально покоящегося тела может произойти только в состоянии предельного равновесия.

Будем считать, что силы сухого трения подчиняются закону Амонтона-Кулона, что выражается зависимостью

$$d\mathbf{F} = -f \cdot dN \cdot \mathbf{v}_0 = -f \cdot p(t, \xi, \eta) dS \cdot \mathbf{v}_0,$$

где $d\mathbf{F}$ – сила трения, действующая на элемент площади dS при повороте тела вокруг точки $P(x, y)$; f – коэффициент трения скольжения, t – время; \mathbf{v}_0 – единичный вектор направления скорости.

Суммарный момент предельных сил трения относительно центра $P(x, y)$ возможного поворота равен

$$M(t, x, y) = \iint_D PA \cdot dF = \iint_D f \cdot p(t, \xi, \eta) \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2} d\xi d\eta; \quad (1)$$

частные производные $M'_x(t, x, y)$, $M'_y(t, x, y)$ выражают проекции главного вектора предельных сил трения при условии поворота вокруг центра $P(x, y)$:

$$F_x(t, x, y) = M'_y(t, x, y) = - \iint_D f \cdot p(t, \xi, \eta) \frac{\eta - y}{\sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2}} d\xi d\eta, \quad (2)$$

$$F_y(t, x, y) = -M'_x(t, x, y) = \iint_D f \cdot p(t, \xi, \eta) \frac{\xi - x}{\sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2}} d\xi d\eta. \quad (3)$$

Нетрудно показать, что функция $M(t, x, y)$ является строго выпуклой в каждый момент времени t и поэтому имеет единственную точку экстремума – точку минимума. Действие внешних сдвигающих сил характеризуется главным вектором $\mathbf{R}(t)$, который будем считать направленным вдоль оси Ox , и главным моментом $L_{Oz}(t)$.

Сдвиг первоначально покоящегося тела при возрастании внешнего воздействия происходит в виде поворота вокруг точки $P_0(x_0, y_0)$, являющейся точкой минимума функции моментов

$$M_{Oz}(t, x, y) = M(t, x, y) - |L_{Oz}(t) + R_x(t) \cdot y|$$

в тот момент времени, когда функция $M_{Oz}(t, x, y)$, будучи до этого положительной, обращается в нуль в точке $P_0(x_0, y_0)$.

В качестве примера рассмотрим сдвиг с места прямоугольной площадки при равномерном распределении давления под действием силы F (рис. 2). Размеры площадки $2a \times 2b$, сила F параллельна оси Ox и отстоит от нее на расстоянии h .

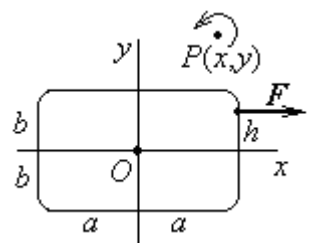


Рис. 2. Схема сил, действующих на прямоугольную площадку.

Для определения координат центра поворота в зависимости от величины силы F и расстояния h достаточно считать $f = 1$, $p(t, x, y) = p = 1$ (трение считается изотропным и однородным), время t , как аргумент, опустить; для краткости прямоугольную площадку будем называть контактом. Из соображений симметрии нетрудно установить, что центр поворота должен лежать на оси Oy ($x_0 = 0$).

В соответствии с формулами (1), (2) момент сил трения $M(x, y)$ и главный вектор $F_x(x, y)$ принимают вид ($f = 1$, $p = 1$):

$$M(x, y) = \int_{-a}^a d\xi \int_{-b}^b \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2} d\eta, \quad (4)$$

$$F_x(x, y) = - \int_{-a}^a d\xi \int_{-b}^b \frac{\eta - y}{\sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2}} d\eta. \quad (5)$$

Графики зависимостей $M(x, y)$ и $F_x(x, y)$ средствами математического пакета Mathcad представлены на рис 3.

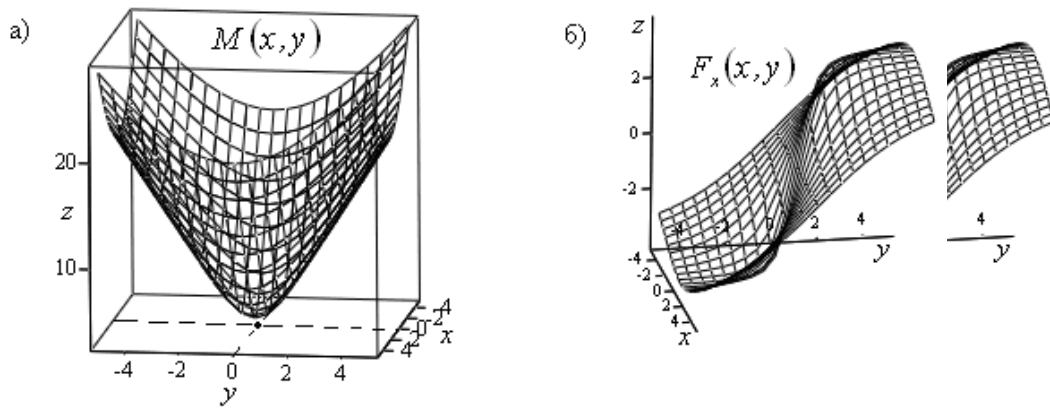


Рис. 3. Графики зависимостей $M(x, y)$ и $F_x(x, y)$.

Сдвиг с места твердого тела – следствие нарушения уравнений равновесия:

$$F + F_x(x, y) = 0, \quad -F \cdot (h - y_0) + M_x(x, y) = 0.$$

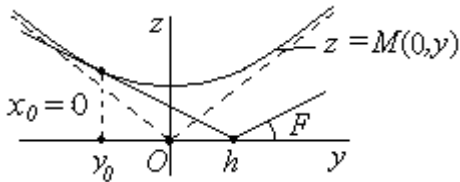


Рис. 4. Графическое определение параметров сдвигающей силы.

Для определения алгоритма расчета положения центра начального поворота $P_0(x_0, y_0)$, величины сдвигающей силы F и расстояния h достаточно провести все рассуждения при $x_0 = 0$ (рис. 4).

Графически появление центра поворота в момент сдвига контакта отражается появлением точки касания $y = y_0$ ломаной $z = F \cdot |y - h|$ с графиком функции $z = M(0, y)$ при фиксированном расстоянии h и возрастающей от нуля величине силы F , играющей роль

углового коэффициента.

Аналитическое определение зависимости координаты y_0 центра поворота от расстояния h не представляется возможным. Будем исходить из того, что в момент сдвига сдвигающая сила F совпадает по величине с главным вектором предельных сил трения,

$$F = |F_x(0, y_0)|.$$

Анализ зависимости $F(y_0)$ показывает, что чем ближе центр начального поворота к центру симметрии контакта ($y_0 \rightarrow 0$), тем меньше сдвигающая сила; при удалении центра поворота сдвигающая сила возрастает, асимптотически приближаясь к определенному значению (рис. 5).

Эти выводы нужно соотносить с зависимостью расстояния $h(y_0)$, представленной на рис. 6:

$$h(y_0) = y_0 - \frac{M(0, y_0)}{|F_x(0, y_0)|} \cdot \text{Sign } y_0.$$

(7)

Анализ графика зависимости $h(y_0)$ показывает, что с приближением центра начального поворота к центру симметрии контакта ($y_0 \rightarrow 0$) расстояние h сдвигающей силы должно увеличиваться, а при удалении центра поворота ($y_0 \rightarrow \infty$) расстояние h уменьшается до нуля; при этом величины h и y_0 имеют всегда противоположные знаки, что говорит о том, что линия действия сдвигающей силы и центр начального поворота всегда расположены по разные стороны от центра симметрии контакта.

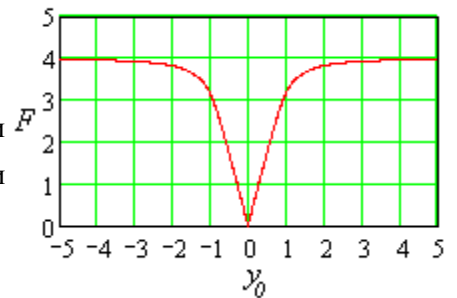


Рис. 5. Графическое представление функциональной зависимости (6)

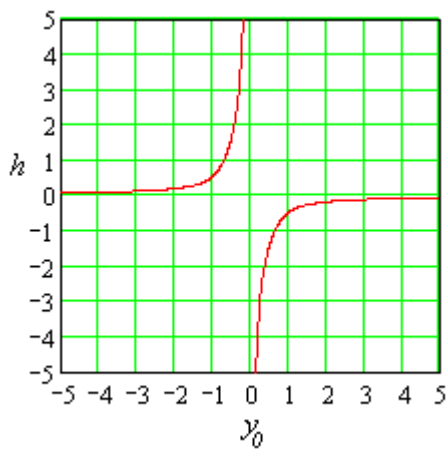


Рис. 6. Графическое представление функциональной зависимости

Обобщая сказанное, можно сделать следующий вывод: при равномерном распределении нормального давления малым значениям h будут соответствовать достаточно большие значения предельной сдвигающей силы и достаточно далекое расположение центра начального поворота ($|y_0| \gg h$); с увеличением h предельная сила убывает и центр начального поворота приближается к центру симметрии контакта.

-
1. Лойцянский Л.Г., Лурье А.И. Курс теоретической механики: В 2-х т. – М.: Наука, 1983.
 2. Опейко Ф.А. Математическая теория трения. – Минск: Наука и техника, 1971. – 152 с.
 3. Сельвинский В.В. Динамика контактного взаимодействия твердых тел. – Благовещенск: АмГУ, 2009. 165 с.