А.Г. Масловская, Т.Р. Осокина, Т.К. Барабаш

ПРИМЕНЕНИЕ ФРАКТАЛЬНЫХ МЕТОДОВ ДЛЯ АНАЛИЗА ДИНАМИЧЕСКИХ ДАННЫХ

The paper discusses different approaches to the studies of time numbers fractal behavior. The problem of fractal dimension definition is being solved by Hurst method. The research of possibility of application the multifractal approach to the analysis of time numbers is also considered.

Введение

Теория фракталов и мультифракталов в настоящее время широко используется для описания свойств самоподобия и сложного скейлинга, наблюдаемых в самых различных приложениях. К множеству фракталов относят объекты (линии, поверхности, тела), которые имеют сильно изрезанную форму и демонстрируют некоторую повторяемость в широком диапазоне масштабов [1]. Однако не только геометрические формы объектов имеют фрактальное строение, временные характеристики процессов и явлений, протекающих в средах с самоподобной структурой, также обнаруживают фрактальное поведение. Фрактальные временные ряды – целый класс фрактальных кривых, широко используемых при описании и моделировании разнообразнейших явлений.

Временной ряд представляет последовательность значений исследуемой величины, зафиксированных через равные промежутки времени. Как правило, рядами представляются случайные изменения величин, наиболее популярные примеры которых дают колебания обменных курсов валют и временные изменения других экономических показателей. Естественное представление наблюдений природных явлений также сводится к временным рядам измерений температуры воздуха, количества осадков, скорости ветра и других метеорологических данных. Временные ряды широко используются в медицине, где наиболее яркий пример дает электрокардиограмма сердца, а также при описании стохастических процессов в физике, химии, социологии и других областях науки и техники. Анализ временных рядов является основой разработки и верификации макроскопических моделей, позволяющих последовательно представить эволюцию сложных систем на основе микроскопических данных.

Одной из важнейших количественных характеристик фрактальных объектов является понятие фрактальной размерности, или показателя скейлинга, описывающего повторяемость геометрии (для регулярных фракталов) или статистических характеристик (для нерегулярных фракталов) при изменении масштаба. Однако в различных научных областях встречается множество явлений, требующих распространения понятия фрактала на более сложные структуры, характеризующиеся спектром показателей фрактальной размерности, – мультифракталы [2].

Целью данной работы являются исследование и программная реализация различных методов математического анализа фрактальной и мультифрактальной размерности виртуальных и реальных временных рядов.

Метод *R/S*-анализа временных рядов

Основная количественная характеристика фракталов – размерность D, введенная Хаусдорфом еще в 1919 г. для компактного множества в произвольном метрическом пространстве [2]. Для большинства естественных временных рядов аналитическое нахождение фрактальной размерности невозможно, поэтому D определяют численно: либо непосредственно, либо через величины, связанные с ней простым соотношением (например, через показатель Херста H). Для калибровки временных измерений Херст ввел безразмерное отношение посредством деления размаха на стандартное отклонение наблюдений *R/S*. Этот способ анализа стали называть методом нормированного размаха, или *R/S*-анализом [3].

R/S-анализ является процессом, который требует переработки большого количества данных. В этом методе временной ряд $N(t)$ разбивается на A смежных периодов длины n и определяется среднее значение нормированного размаха:

$$(R/S)_n = (1/A) \cdot \sum_{a=1}^{A} (R_I / S_{I_a}), \qquad (1)$$

где R_I – максимальный размах, а S_I – выборочное отклонение, вычисленные для каждого периода.

Каждое наблюдение несет память обо всех предшествующих событиях. Это долговременная память – недавние события имеют влияние больше, чем события отдаленные, но остаточное влияние последних всегда ощутимо. В долговременном масштабе система, которая дает статистику Херста, есть результат длинного потока взаимосвязанных событий [4]. Влияние настоящего на будущее может быть выражено корреляционным соотношением [5]:

$$C = 2^{2H-1} - 1, \qquad (2)$$

где C – мера корреляции; H – показатель Херста.

Это выражение служит для оценки корреляционных отношений временных рядов. Трендоустойчивость поведения растет при приближении H к единице, или стопроцентной корреляции в вышеприведенном выражении. Если же H = 0,5, то C = 0. Следовательно, всякая корреляция отсутствует. Чем ближе H к 0,5, тем менее выражен тренд временного ряда.

Показатель Херста может быть вычислен посредством проведения линейной регрессии для зависимости $log(R/s)_n$ от $log(n)$. Наклон прямой и является оценкой показателя Херста H. Показатель Херста, в свою очередь, связан с фрактальной размерностью D кривой соотношением [3]:

$$D = 2 - H,$$

где D – фрактальная размерность кривой.

Таким образом, имеются три различных динамики при различных показателях Херста: 1) $0{,}5 < H < 1{,}0$ – персистентные, или трендоустойчивые ряды, 2) $H = 0{,}5$ – показатель Херста указывает на случайный ряд, 3) $0 \le H \le 0{,}5$ – диапазон соответствует антиперсистентным рядам («возврат к среднему»).

Для проведения *R*/*S*-анализу заданного временного ряда предложено программное приложение, разработанное в пакете математических программ Matlab. Приложение позволяет проводить фрактальный анализ динамических данных методом нормированного размаха, результатом которого являются значения показателя Херста и фрактальной размерности (рис. 1).

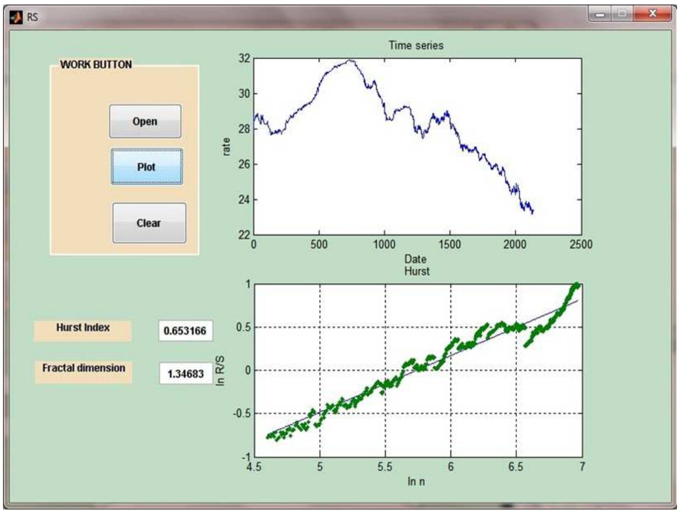


Рис. 1. Результат работы приложения, реализующего метод *R/S*-анализа.

В качестве примера временного ряда рассмотрим динамику изменения курса доллара США к российскому рублю за период 2000-2010 гг. (соответствующие данные могут быть найдены в архиве Центрального банка РФ по адресу www.cbr.ru). Характерная особенность графика этих колебаний – наличие участка, обнаруживающего аномально большие изменения разности курса. Эти изменения отражают финансовый мировой кризис (август 2008 г.). Как отмечают многие авторы [4, 6, 7], в период кризиса фрактальный анализ не несет в себе никакой информативности вследствие стохастичности данного периода. Поэтому, как правило, его проводят, избегая периодов кризиса и разделяя данные на «до» и «послекризисные». Поэтому для анализа были выделены периоды 2000-2008 гг. и 2008-2010 гг., характеризующие докризисное и послекризисное поведение курса соответственно. Для ряда данных за 2000-2008 гг.: показатель Херста равен 0,6532, фрактальная размерность – $D = 1{,}3468$ и мера корреляции – $C = 0{,}2366$. Для послекризисного периода результат работы программы дает значение Херста, равное 0,9022, и фрактальную размерность ряда на данном интервале $D = 1{,}0978$. Технический анализ графика позволяет сделать вывод о том, что на рассмотренном интервале курс доллара снижается, а результат *R/S*-анализа свидетельствует, что курс находится в персистентном интервале. Но также стоит отметить, что столь близкое к единице значение фрактальной размерности указывает на скорое окончание действующего тренда. Мера корреляции в данном случае равна $C = 0{,}7464$.

Показатель C служит для оценки корреляционных соотношений персистентных или трендоустойчивых временных рядов. Это значит, что если ряд возрастает (убывает) в предыдущий период, то, вероятно, он будет сохранять эту тенденцию какое-то время в будущем. Трендоустойчивость поведения или сила персистентности растет при приближении H к 1. Если же $H = 0{,}5$, то $C = 0$, т.е. всякая корреляция отсутствует. Чем ближе H к 0,5, тем более зашумлен ряд и тем менее выражен его тренд.

Значение показателя Херста позволяет сделать выводы о данном распределении и прогнозировать дальнейшее поведение цены валюты. Он показывает, что, несмотря на резкий скачок курса доллара, в данный момент хорошо выражена тенденция его снижения, и, судя по проведенному анализу, эта тенденция будет сохраняться на протяжении некоторого периода.

Колебания величины фрактальной размерности динамических данных в пределах $1{,}0 < D < 2{,}0$ свидетельствуют о мультифрактальности рассматриваемого процесса, причем фрактальная размерность меняется не равномерно, а по характерным участкам. По мнению автора [8], в отношении курсов валют для каждого отдельного диапазона значений фрактальной размерности следует применять корректные методы математической обработки. Так, при $1{,}0 < D < 1{,}5 - 0{,}05$ временные ряды валютных курсов имеют долговременную корреляцию и циклы, возникает персистентное состояние валютного курса, характеризующееся показателем фрактальной размерности. В этом случае количественный математический анализ имеет большую достоверность, что позволяет прогнозировать текущую экономическую обстановку именно с помощью классических методов анализа. При $1{,}5 - 0{,}05 < D < 1{,}5 + 0{,}05$ поведение системы стохастическое и хорошо описывается классическими статистическими методами. Это означает, что распределение курсов валют на российском валютном рынке является гауссовским лишь при значениях фрактальной размерности в узком интервале. В третьем случае $1{,}5 + 0{,}05 < D < 2{,}0$. Чем больше *D*, тем более нелинейным становится временной ряд, возникает антиперсистентное состояние валютного курса. Временная кривая валютного курса становится неустойчивой и готова перейти в новое состояние. При подобных значениях фрактальной размерности остается лишь использовать анализ фундаментальных факторов состояния экономики [8].

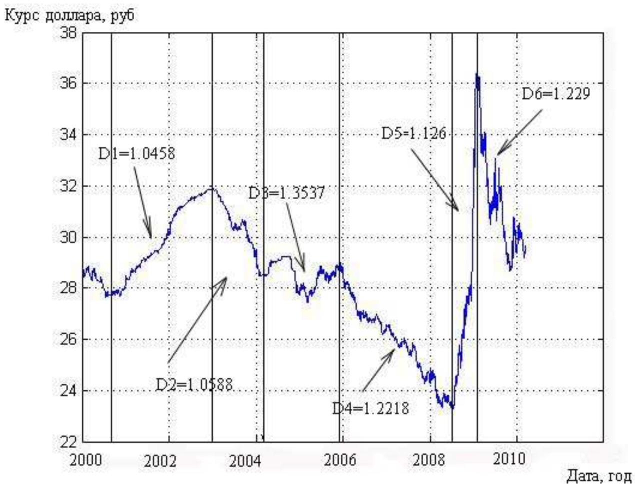


Рис. 2. Результат применения методики Херста на подпериодах временного ряда.

Если разбить временной ряд (соотношение курса валют доллар/рубль за период с 2000-2010 гг.) на участки и для каждого участка провести технический анализ, получим различные значения фрактальной размерности (рис. 2).

Такой результат обусловлен смешанной природой временного ряда.

Таким образом, проведенный технический анализ различных временных интервалов валютного курса обнаруживает, что финансовый временной ряд не является монофракталом. В связи с этим возникает необходимость проведения анализа рассматриваемых рядов специализированными мультифрактальными методами. К числу их относятся, например, метод мультифрактального анализа и методы, основанные на Фурье- и вейвлет-преобразованиях [9]. В рамках данной работы был использован метод мультифрактального флуктуационного анализа [10].

Реализация алгоритма метода мультифрактального флуктуационного анализа

Алгоритм метода мультифрактального флуктуационого анализа сводится к последовательности выполнения следующих шагов [10].

Сначала из ряда $x(k)$, $k = 1,2,...,N$ выделяем флуктуационный профиль

$$y(i) = \sum_{k=1}^{i} \left| x(k) - \bar{x} \right|, \qquad (3)$$

отсчитанный от средней величины $\bar{x}$. Затем разделяем полученные значения $y(i)$ по непересекающимся сегментам длины *s*, число которых равно целому значению $N_s = [N/s]$. Так как длина ряда *N* не всегда кратна выбранной шкале *s*, то в общем случае последний участок содержит число точек, меньше *s*. Для учета этого остатка следует повторить процедуру деления на сегменты, начиная с противоположного конца ряда. В результате полное число сегментов, обладающих длиной *s*, составит $2N_s$.

Поскольку изменение случайной величины $y(i)$ происходит вблизи значения $y_v(i)\neq 0$, обусловленного определенной тенденцией (трендом) эволюции ряда, то далее следует найти локальный тренд $y_v(i)$ для каждого из $2N_s$ сегментов. При этом проще всего использовать метод наименьших квадратов, представляя тренд $y_v(i)$ полиномом, степень которого выбирается таким образом, чтобы обеспечить интерполяцию с ошибкой, не превышающей заданный предел. Затем определяем дисперсию

$$F^2(v,s)=\frac{1}{s}\sum_{i=1}^{s}\{y|v-1|s+i-y_v(i)\}^2 \tag{4}$$

для сегментов $v=1,\ldots,N$, следующих в прямом направлении, и соответствующее значение

$$F^2(v,s)=\frac{1}{s}\sum_{i=1}^{s}\{y|N-(v-N_s)s+i|-y_v(i)\}^2 \tag{5}$$

– для обратной последовательности $v=N_s+1,\ldots,2N_s$.

На следующем шаге вводим деформированную дисперсию

$$F_q(s)=\{\frac{1}{2N_s}\sum_{v=1}^{2N_s}[F^2(v,s)]^{q/2}\}^{1/q}, \tag{6}$$

полученную возведением выражений (3), (4) в степень q и последующим усреднением по всем сегментам. Поскольку при $q=0$ равенство (6) содержит неопределенность, то вместо используют предельное выражение

$$F_q(s)=exp\left(\lim_{q\to 0}\frac{2N_s\cdot\frac{1}{2N_s}\cdot\frac{1}{2}\sum_{v=1}^{2N_s}F^2(v,s)^{q/2}\,ln\sum_{v=1}^{2N_s}F^2(v,s)}{\sum_{v=1}^{2N_s}F^2(v,s)^{q/2}}\right),$$

откуда получаем значение деформированной дисперсии при $q=0$:

$$F_0(s)=exp\left\{\frac{1}{4N_s}\sum_{v=1}^{2N_s}ln\left[F^2(v,s)\right]\right\}. \tag{7}$$

Изменяя временную шкалу s при фиксированном показателе q, находим зависимость $F_s(s)$, представляя ее в двойных логарифмических координатах. Если исследуемый ряд сводится к самоподобному множеству, проявляющему дальнодействующие корреляции, то флуктуационная функция $F_q(s)$ представляется степенной зависимостью

$$F_q(s)\propto s^{h(q)}$$

с обобщенным показателем Херста $h(q)$, величина которого определяется параметром q. Из определений (6), (7) следует, что при $q=2$ этот показатель сводится к обычному значению H. Для временных рядов, которые отвечают монофрактальному множеству, флуктуационная функция $F^2(v,s)$ одинакова для всех сегментов v и обобщенный показатель Херста $h(q)=H$ не зависит от параметра деформации q. Для мультифрактальных рядов при положительных q основной вклад в функцию $F_q(s)$ дают сегменты v, проявляющие большие отклонения $F^2(v,s)$, а при отрицательных q доминируют сегменты с малыми дисперсиями $F^2(v,s)$. Следовательно, можно заключить, что при отрицательных значениях q обобщенный показатель Херста $h(q)$ описывает сегменты, проявляющие малые флуктуации, а при положительных – большие [10].

При реализации изложенного алгоритма следует иметь в виду, что с ростом размера сегментов до $s > N/4$ функция $F_q(s)$ теряет статистическую информативность из-за малости числа $N_s < 4$ сегментов, используемых при усреднении. Таким образом, проведение указанной процедуры предполагает исключение, с одной стороны, больших сегментов ($s > N/4$), а с другой, – малых ($s < 10$).

Стандартное представление скейлинговых свойств временного ряда предполагает переход от показателя Херста $h(q)$ к массовому показателю $\tau(q)$ и спектральной функции $f(\alpha)$, которые являются основными характеристиками мультифракталов [3]:

$$\tau(q) = qh(q) - 1,$$

$$f(\alpha) = \alpha q(\alpha) - \tau(q(\alpha)).$$

Здесь значение $q(\alpha)$ определяется условием $\tau'(q) = \alpha$, где штрих означает дифференцирование по аргументу. При $q >> 1$ зависимость $\tau(q)$ имеет линейно возрастающий вид с криволинейным участком вблизи $q = 0$, который обеспечивает замедление роста массового показателя τ по мере увеличения параметра деформации q. Спектральная функция $f(\alpha)$ определяет набор монофракталов с размерностями α, формирующих исследуемое множество: при этом относительное число монофракталов с данным α, которые попадают в ячейки размером *l*, покрывающие это множество, задается соотношением $N(\alpha) \sim l^{-f(\alpha)}$. Согласно этому определению ширина спектра $f(\alpha)$ будет тем больше, чем сильнее выражены мультифрактальные свойства (так, монофрактал характеризуется единственным значением α) [3].

Проведем тестирование изложенного метода на временных рядах, допускающих аналитическое представление. Рассмотрим некоррелированный ряд, случайные значения которого распределены с плотностью вероятности: $P(x) = \alpha x^{-(\alpha+1)}$, где степенной характер отражает самоподобие множества $1 \le x < \infty$ при $\alpha > 0$. При этом показатель Херста выражается равенством

$$H = \begin{cases} 1/q, & q > \alpha, \\ 1/\alpha, & \alpha < q. \end{cases}$$

Результат применения метода мультифрактального анализа к рассмотренному некоррелированному самоподобному ряду обнаруживает хорошую согласованность численных и аналитических данных.

Расчет мультифрактальных характеристик временных рядов

Рассмотрим результат работы программного приложения, реализующего метод мультифрактального флуктуационного анализа, на примере исследования соотношения курса валют доллар/рубль. Согласно принятой методике колебания валютных котировок представляются временным рядом разницы логарифмов обменных курсов

$$r(t) = ln(p(t-1)), \tag{8}$$

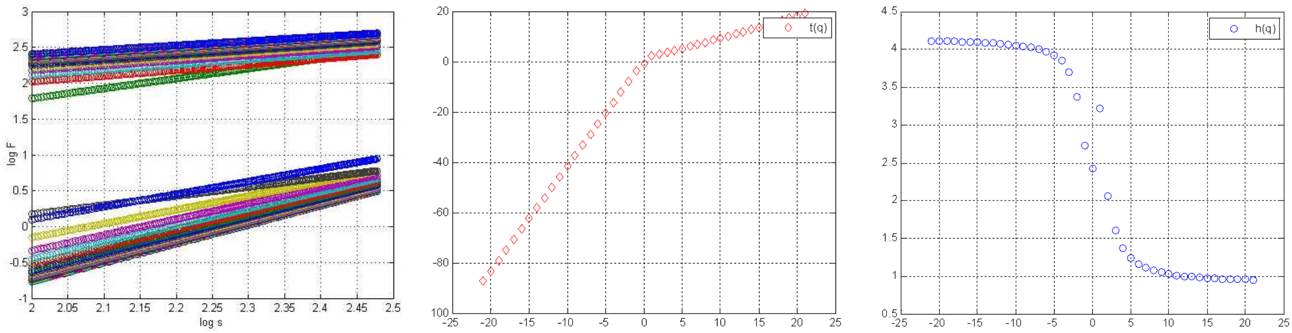
где $P(t)$ – цена валюты в день t.

При алгоритмической реализации тренд $y_v(i)$ представлялся полиномом первой степени с использованием метода наименьших квадратов.

На рис. 3 представлены промежуточные результаты работы программного приложения, дающие графическую иллюстрацию последовательным этапам реализации метода мультифрактального флукутационного анализа: зависимость дисперсии от размера сегмента, зависимость массового показателя от параметра *q* и зависимость показателя Херста от параметра *q*.

Применяя метод мультифрактального анализа, рассмотрим влияние кризиса на мультифрактальные свойства временного ряда. С этой целью проведем раздельный анализ участков ряда, один из которых предшествует кризису – 2005-2008 гг., а другой следует за ним – 2008-2010 гг.

Применение метода мультифрактального анализа к двум периодам позволяет сделать вывод, что вследствие кризиса спектральная функция $f(\alpha)$ приобретает более широкий интервал $\Delta\alpha$ изменения фрактальных размерностей (значение $\Delta\alpha = 1{,}03$ – за период 2005-2008 гг., и соответственно $\Delta\alpha = 1{,}30$ – за период 2008-2010 гг.). Таким образом, можно отметить, что экономический кризис приводит к усилению мультифрактальных свойств временных рядов экономических показателей.



а *б* *в*

Рис. 3. Этапы применения методики мультифрактального флуктуационного анализа динамических данных: *а* – зависимость дисперсии F_q от размера сегмента s при q=-21:21; *б* – зависимость массового показателя τ от показателя q; *в* – зависимость показателя Херста H от показателя q.

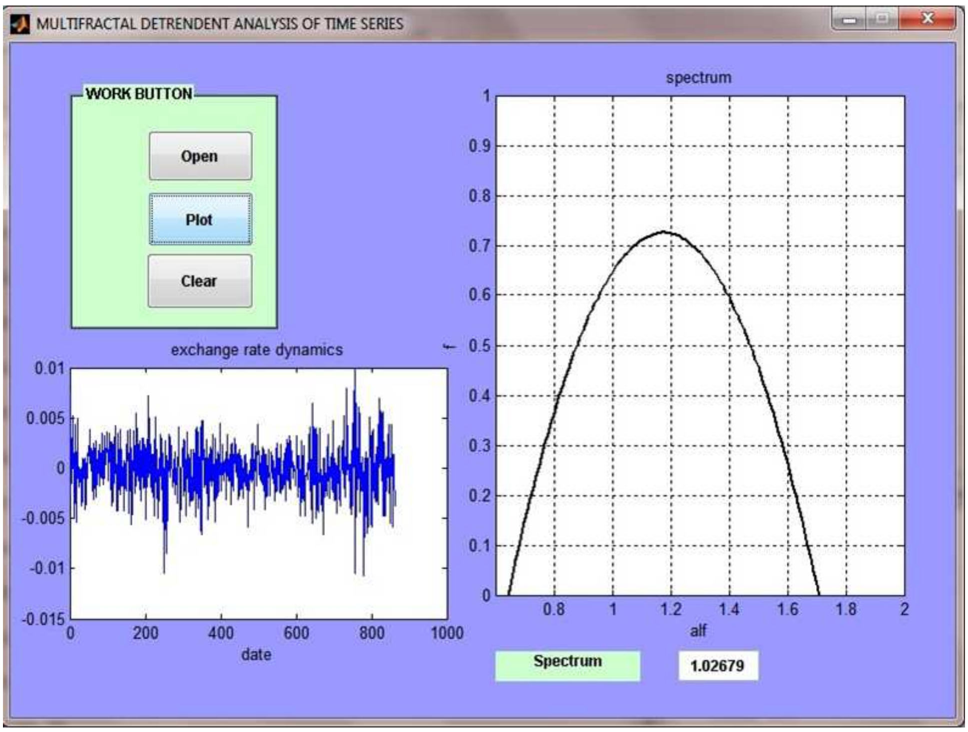


Рис. 4. Построение графика и расчет фрактального спектра.

Заключение

В данной работе проведен фрактальный анализ временных рядов. Для определения фрактальной размерности были использованы метод *R*/*S*-анализа и метод мультифрактального флуктуационного анализа. Первый является устойчивым методом для раскрытия эффектов долговременной памяти, фрактальной статистической структуры и наличия циклов, он позволяет отличить фрактальные временные ряды от других типов временных рядов, раскрывая их самоподобную статистическую структуру. Возможности использования локального фрактального анализа продемонстрированы на задаче о прогнозировании временных рядов, имеющих такое важное практическое значение как оценка поведения обменных курсов валют. Разработано программное приложение, позволяющее проводить расчет фрактальных характеристик временных рядов на основе методики Херста и метода мультифрактального флуктуационного анализа.

---

1. Федер, Е. Фракталы. – М.: Мир, 1991. – 262 с.
2. Божокин, С.В. Фракталы и мультифракталы / С.В. Божокин, Д.А. Паршин. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. – 128 с.
3. Петерс, Э. Фрактальный анализ финансовых рынков – М.: Интернет-трейдинг, 2004. – 304 с.
4. Старченко, Н.В. Индекс фрактальности и локальный анализ хаотических временных рядов: Автореф. дис. …канд. физ.-мат. наук. – М.: МИФИ, 2005. – 119 с.
5. Кроновер, Р. Фракталы и хаос в динамических системах. – М.: Постмаркет, 2000. – 352 с.
6. Никульчев, Е.В. Модели хаоса для процессов изменения курса акций // Методы. Алгоритмы. Программы. – 2003. – № 1(1). – С. 4.
7. Алмазов, А.А. Краткая история фракталов на валютном рынке Форекс [Электронный ресурс] // Валютный рынок Форекс.: офиц.сайт. – 2008. – Режим доступа: http://adamaz.ru.
8. Гуляева, О.С. Управление валютными рынками на основе предпрогнозного анализа валютных рынков фрактальными методами: Автореф. дис. …канд. экон. наук. – М.: МГУ, 2008. – С. 27.
9. Павлов, А.Н., Анищенко, В.С. Мультифрактальный анализ сложных сигналов // Успехи физических наук. – 2007. – Т. 177, № 8. – С. 859-877.
10. Олемской, А.И. Синергетике сложных систем: Феноменология и статистическая теория. – М.: Красандр, 2009. – 384с.