Т.В. Труфанова, Е.М. Веселова

РЕШЕНИЕ ВТОРОГО УРАВНЕНИЯ ПЕНЛЕВЕ МЕТОДОМ ЕРУГИНА

In article the decision of the second equation of Penleve is in detail resulted by a method of Erugina.

С помощью метода Еругина построим решение второго уравнения Пенлеве:

$$y'' = 2y^3 + xy + \alpha\,, \tag{1}$$

где α – константа. Условимся считать ее большей нуля.

Перепишем уравнение (1) в виде системы:

$$\frac{dy}{dx} = z\,, \qquad \frac{dz}{dx} = 2y^3 + xy + \alpha\,. \tag{2}$$

Тогда согласно теореме Еругина эта система в окрестности особой точки x_0 имеет решение, обладающее свойством

$$y(x) \to \infty, \quad z(x) \to \infty \quad \text{при} \quad x \to x_0\,. \tag{3}$$

Построим такое решение и докажем его существование.

Как и ранее, из системы (2) имеем

$$\frac{dz}{dy} = \frac{2y^3 + xy + \alpha}{z}\,,$$

или

$$z\,dz = 2y^3 dy + xy\,dy + \alpha\,dy\,. \tag{4}$$

Проинтегрируем равенство (4). Получим

$$z^2 = y^4 + \int_{\infty}^{y} 2xy\,dy + \alpha y + C\,, \tag{5}$$

где C – некоторая произвольная постоянная.

Согласно первому уравнению системы (2) $dy = z\,dx$. Тогда (5) можно переписать в виде

$$z^2 = y^4 + \int_{x_0}^{x} xyz\,dx + \alpha y + C\,. \tag{6}$$

Рассмотрим интеграл, стоящий в правой части выражения (6). Обозначим

$$\alpha(x) = y^{-4} \int_{x_0}^{x} xyz\,dx\,. \tag{7}$$

Покажем, что $\alpha(x) = O(xy^{-2})$. Согласно правилу Лопиталя найдем

$$\lim_{y\to\infty} \frac{\int_{x_0}^{x} xyz\,dx}{y^4} = \lim_{y\to\infty_0} \frac{xyz}{4y^3 \frac{dy}{dx}} = \lim_{y\to\infty} \frac{xyz}{4y^3 z} = \lim_{y\to\infty} \frac{x}{4y^2} = \lim_{y\to\infty} \frac{1}{8y\frac{dy}{dx}} = \lim_{y\to\infty} \frac{1}{8yz} = 0\,.$$

Отсюда вытекает, что

$$\alpha(x) = y^{-4} \int_{x_0}^{x} xyz\,dx = O(xy^{-2})\,. \tag{8}$$

Введем еще величину

$$\beta_n(y)=\int\limits_{\infty}^{y}O(y^{-n})\,dy, \quad n>1.$$

Ранее было показано, что $\beta_n(y)$ при $x\to x_0$ есть малая ограниченная величина порядка y^{1-n}, т.е. можно записать

$$\int\limits_{\infty}^{y}O(y^{-n})\,dy=O(y^{1-n}), \quad n>1. \qquad (9)$$

На основании (8) и (9) равенство (6) перепишем в виде

$$z^2=y^4[1+O(y^{-2})], \qquad (10)$$

откуда легко получить, что

$$z=y^2[1+O(y^{-2})]. \qquad (11)$$

Из (11) очевидно, что все решения системы (2) на плоскости $(y,\,z)$ асимптотически приближаются к кривой $z=y^2$.

Далее для системы (2) на основании равенства (11) имеем

$$dx=\frac{dy}{z}=\frac{1+O(y^{-2})}{y^2}dy. \qquad (12)$$

Проинтегрировав (12) слева от x_0 до x, а справа от ∞ до y, найдем

$$x-x_0=-\frac{1}{y}+\int\limits_{\infty}^{y}y^{-2}O(y^{-2})\,dy=-\frac{1}{y}+\int\limits_{\infty}^{y}O(y^{-4})\,dy, \qquad (13)$$

или с учетом равенства (9)

$$x-x_0=-\frac{1}{y}+O(y^{-3}). \qquad (14)$$

Выразим отсюда x и подставим в (4). Тогда

$$z\,dz=2y^3dy+\left(x_0-\frac{1}{y}+O(y^{-3})\right)y\,dy+\alpha\,dy.$$

Проинтегрируем:

$$z^2=y^4+x_0y^2-2y+2\int\limits_{\infty}^{y}O(y^{-2})dy+\alpha y+C,$$

где C – произвольная постоянная.

Воспользовавшись далее равенством (9), перепишем (17) в виде

$$z^2=y^4+x_0y^2-2y+O(y^{-1})+\alpha y+C. \qquad (15)$$

После вынесения в правой части общего множителя получим

$$z^2=y^4[1+x_0y^{-2}-2y^{-3}+O(y^{-5})+\alpha y^{-3}+Cy^{-4}].$$

Извлекая из этого выражения квадратный корень, получим:

$$z=y^2\left[1+\frac{x_0y^{-2}}{2}-y^{-3}+\alpha y^{-3}+\frac{C}{2}y^{-4}+O(y^{-5})\right]. \qquad (16)$$

Здесь, как и ранее, была использована известная формула $(1+a)^{1/2}=1+\frac{1}{2}a+\ldots$.

Из первого уравнения системы (2) видим, что $dx = \frac{dy}{z}$.

Тогда, подставив сюда вместо z разложение (16) и воспользовавшись формулой $(1+a)^{-n} = 1 - na + \ldots$, найдем:

$$dx = \frac{1 - \frac{x_0 y^{-2}}{2} + y^{-3} + \alpha y^{-3} + \frac{C}{2} y^{-4} + O(y^{-5})}{y^2} dy,$$

или

$$dx = \left[\frac{1}{y^2} - \frac{x_0 y^{-4}}{2} + y^{-5} - \alpha y^{-5} - \frac{1}{2} C y^{-6} + O(y^{-7}) \right] dy. \tag{17}$$

Проинтегрируем слева от x_0 до x, справа – от ∞ до y. Тогда

$$x - x_0 = -\frac{1}{y} + \frac{x_0}{6} y^{-3} - \frac{1}{4} y^{-4} + \frac{\alpha}{4} y^{-4} + \frac{C}{10} y^{-5} + O(y^{-6}). \tag{18}$$

Заметим, что если нам удастся доказать существование решения системы (2), обладающего свойством (3), то равенства (11), (14) и (16), (18) во всяком случае доставляют асимптотическое разложение этого решения.

Итак, положим:

$$u = zy^{-2}. \tag{19}$$

Тогда из (11) видно, что $u \to 1$ при $x \to x_0$.

Продифференцируем введенную замену по y, тогда

$$\frac{du}{dy} = \frac{dz}{dy} y^{-2} - 2zy^{-3}. \tag{20}$$

Далее согласно системе (2) и замене (19) имеем:

$$\frac{du}{dy} = \frac{2y^3 + xy + \alpha}{z} y^{-2} - 2zy^{-3},$$

или

$$\frac{du}{dy} = \frac{2y^3 + xy + \alpha}{u} y^{-4} - 2uy^{-1}. \tag{21}$$

Первое уравнение системы (2) на основании замены (19) перепишем как

$$\frac{dx}{dy} = u^{-1} y^{-2}. \tag{22}$$

Пусть теперь

$$v = y^{-1/2}. \tag{23}$$

Тогда

$$dy = -\frac{2}{v^3} dv,$$

и уравнения (21), (22) примут вид

$$v \frac{du}{dv} = \frac{4u^2 - 4}{u}, \qquad \frac{dx}{dv} = -\frac{2v}{u}. \tag{24}$$

Введем еще одну замену по формулам

$$u = 1 + \tau, \qquad x - x_0 = \theta. \tag{25}$$

Очевидно, что $\tau \to 0, \quad \theta \to 0$ при $v \to 0$.

Из (25) найдем, что $du = d\tau, \quad dx = d\theta$. С учетом этого из уравнений (24) получаем:

$$v\frac{d\tau}{dv} = \frac{4(\tau^2 + 2\tau)}{1+\tau} - \frac{2(\theta + x_0)v^4 + 2\alpha v^6}{1+\tau}, \qquad \frac{d\theta}{dv} = -\frac{2v}{1+\tau}. \tag{26}$$

На основании равенства (11) и замены (23) легко показать, что $\tau = O(v^4)$. Поэтому положим

$$\tau = v^4\omega. \tag{27}$$

Продифференцируем эту замену:

$$\frac{d\tau}{dv} = 4v^3\omega + v^4\frac{d\omega}{dv}. \tag{28}$$

Подставим (27) и (28) в уравнения (26), тогда:

$$v\frac{d\omega}{dv} = \frac{4\omega - 2(\theta + x_0) - 2\alpha v^2}{1+v^4\omega}, \qquad \frac{d\theta}{dv} = -\frac{2v}{1+v^4\omega}. \tag{29}$$

Наконец, положим:

$$\xi = \theta + v^2, \quad \eta = \omega - \frac{x_0}{2}. \tag{30}$$

Как и прежде, продифференцируем эти замены и подставим все в уравнения (29):

$$v\frac{d\eta}{dv} = \frac{4\left(\eta + \frac{x_0}{2}\right) - 2(\xi - v^2 + x_0) - 2\alpha v^2}{1+v^4\left(\eta + \frac{x_0}{2}\right)}, \quad \frac{d\xi}{dv} - 2v = -\frac{2v}{1+v^4\left(\eta + \frac{x_0}{2}\right)},$$

откуда после преобразования получим

$$v\frac{d\eta}{dv} = \frac{4\eta - 2\xi + 2v^2 - 2\alpha v^2}{1+v^4\left(\eta + \frac{x_0}{2}\right)}, \quad v\frac{d\xi}{dv} = \frac{2v^6\left(\eta + \frac{x_0}{2}\right)}{1+v^4\left(\eta + \frac{x_0}{2}\right)}. \tag{31}$$

Преобразование (30) имело целью уничтожить справа первые степени v и привести линейные члены относительно неизвестных к каноническому виду.

Как и в случае первого уравнения Пенлеве, представим знаменатели в правых частях уравнений (31) в виде суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии, т.е.:

$$\frac{1}{1+v^4\left(\eta + \frac{x_0}{2}\right)} = 1 - q + q^2 - \ldots, \tag{32}$$

где

$$q = v^4\left(\eta + \frac{x_0}{2}\right), \qquad |q| < 1.$$

Тогда уравнения (31) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} v\frac{d\eta}{dv} &= 4\eta - 2\xi + 2v^2 - 2\alpha v^2 + \omega_5(v, \eta, \xi), \\ v\frac{d\eta}{dv} &= \psi_5(v, \eta, \xi). \end{aligned} \tag{33}$$

Здесь

$\omega_5 = \sum_{k+l+m\geq 5} \alpha_{klm} v^k \eta^l \xi^m$, $\psi_5 = \sum_{k+l+m\geq 5} \beta_{klm} v^k \eta^l \xi^m$ – сходящиеся в окрестности точки $v=0,\ \eta=0,\quad \xi=0$ степенные ряды, начинающиеся с пятых степеней (α_{klm}, β_{klm} – константы). Интерес представляет решение уравнений (33), определенное условиями $\eta \to 0,\ \xi \to 0$ при $v \to 0$. Такое решение будем искать для уравнений

$$
\begin{aligned}
& v\frac{d\eta}{dv} = 4\eta + \alpha_1 \xi + 2v^2 - 2\alpha v^2 + \sum_{k+l+m\geq 5} \alpha_{klm} v^k \eta^l \xi^m, \\
& v\frac{d\xi}{dv} = \sum_{k+l+m\geq 5} \beta_{klm} v^k \eta^l \xi^m,
\end{aligned} \tag{34}
$$

где ряды справа сходятся в окрестности точки $v=\eta=\xi=0$. Покажем, что система (34) имеет голоморфное решение

$$
\eta = \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k v^k, \qquad \xi = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k v^k \tag{35}
$$

с постоянными η_k, ξ_k. Тогда, очевидно, и система (33) имеет такое решение. Подставляя ряды (35) в уравнения (34) и сравнивая коэффициенты при всех степенях v слева и справа, находим:

$$\eta_1 = 0,\ \ \eta_2 = \alpha - 1,\ \ \eta_3 = 0,\ \ \eta_4 = C,\ \ ....$$

$$\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = \overline{\xi}_4 = 0,\ ....$$

Докажем сходимость рядов (35). С этой целью рассмотрим систему уравнений

$$
\begin{aligned}
& \eta = |\alpha - 1| v^2 + |C| v^3 + |\alpha_1| v\xi + \sum_{k+l+m\geq 5} |\alpha_{klm}| v^k \eta^l \xi^m, \\
& \xi = \sum_{k+l+m\geq 5} |\beta_{klm}| v^k \eta^l \xi^m.
\end{aligned} \tag{36}
$$

Ряды справа являются мажорантными для правых частей уравнений (34), так как здесь коэффициенты положительные и представляют собой модули коэффициентов рядов (34). Уравнения (36) определяют голоморфные функции в окрестности точки $v=0$:

$$
\eta = \sum_{k=1}^{\infty} \overline{\eta}_k v^k, \qquad \xi = \sum_{k=1}^{\infty} \overline{\xi}_k v^k . \tag{37}
$$

Коэффициенты рядов (37) находим, подставляя их в уравнения (36) и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях v:

$$\overline{\eta}_1 = 0,\quad \overline{\eta}_2 = |\alpha - 1|,\quad \overline{\eta}_3 = 0,\quad \eta_4 = |C|,\ \ ....$$

$$\overline{\xi}_1 = \overline{\xi}_2 = \overline{\xi}_3 = \overline{\xi}_4 = 0,\ ....$$

Очевидно, что $\eta_m \leq \overline{\eta}_m$, $\xi_m \leq \overline{\xi}_m$ $(m = 1, 2, ...)$. Следовательно, из сходимости рядов (37) следует сходимость рядов (35).

Таким образом, мы доказали существование решения уравнений (34) в виде

$$
\begin{aligned}
& \eta = (\alpha - 1)v^2 + Cv^4 + \sum_{k\geq 5} \eta_k v^k, \\
& \xi = \sum_{k\geq 5} \xi_k v^k,
\end{aligned} \tag{38}
$$

где C – произвольная постоянная.

Осуществляя обратные замены по формулам (19), (23), (25), (27) и (30), найдем, что

$$\begin{aligned} &\eta = z - \frac{x_0}{2} - v^{-4}, \\ &\xi = x - x_0 + v^2. \end{aligned} \tag{39}$$

Подставим (39) в разложения (38).

Тогда

$$\begin{aligned} &x = x_0 - v^2 + \frac{x_0}{6} v^6 - \frac{1}{4} v^8 + \frac{\alpha}{4} v^8 + \frac{C}{10} v^{10} + \ldots, \\ &z = v^{-4} + \frac{x_0}{2} - v^2 + \alpha v^2 + \frac{C}{2} v^4 + \ldots, \\ &v = y^{-1/2}. \end{aligned} \tag{40}$$

Выше получены разложения типа (16) и (18), которые доставляли асимптотическое представление решений системы (2), определенных свойством (3), и содержали все такие решения.

Теперь с помощью иных рассуждений получено некоторое семейство подобных решений в виде сходящихся рядов по степеням величины $v = y^{1/2}$, зависящее от произвольной постоянной C.

Построенные семейства совпадают, содержат все решения, определенные свойством (2), и представимы сходящимися рядами.

Возвращаясь в (40) к старым переменным x, y, z, получим следующие разложения для искомого решения:

$$\begin{aligned} &y = \frac{1}{x - x_0}\left(-1 + \frac{x_0}{6}(x - x_0) - \frac{1}{4}(x - x_0)^3 + \frac{\alpha}{4}(x - x_0)^3 + \ldots\right), \\ &z = \frac{1}{(x - x_0)^2}\left(1 + \frac{x_0}{2}(x - x_0)^2 - (x - x_0)^3 + \alpha(x - x_0)^3 + \ldots\right), \end{aligned} \tag{41}$$

или, в общем виде

$$\begin{aligned} &y = \frac{1}{(x - x_0)}\left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} y_k (x - x_0)^k\right], \\ &z = \frac{1}{(x - x_0)^2}\left[-1 + \sum_{k=1}^{\infty} z_k (x - x_0)^k\right], \end{aligned} \tag{42}$$

где z_k и y_k – постоянные; ряды, стоящие в числителях, сходятся в области $|x - x_0| < r,\ r > 0$. Следовательно, в точке x_0 решение $y(x)$, определенное свойством (3), имеет полюс, и такие решения образуют семейство, содержащее одну произвольную постоянную.

---

1. Еругин, Н.П. Проблема Римана. – Минск: Наука и техника, 1982. – 336 с.

2. Итс, А.Р. Трансценденты Пенлеве. Метод задачи Римана / А.Р. Итс, А.А. Капаев, В.Ю. Новокшенов, А.С. Фокас. – Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований; НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2005. – 728 с.